Lecciones populares de matemáticas

ALGUNAS APLICACIONES DE LA MECÁNICA A LAS MATEMÁTICAS

V. A. Uspenski



Editorial MIR



Moscú


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

В. А. УСПЕНСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МЕХАНИКИ К МАТЕМАТИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

V. A. USPENSKI

ALGUNAS APLICACIONES DE LA MECÁNICA A LAS MATEMÁTICAS

Segunda edición

Traducido del ruso
por K. P. Medkov

EDITORIAL "MIR"

MOSCÚ

Primera edición 1979
Segunda edición 1984

На испанском языке

Impreso en la URSS

CONTENIDO

PREFACIO

Las aplicaciones de las matemáticas en la física (particularmente, en la mecánica) son ampliamente conocidas: para convencerse de esto es suficiente abrir un manual escolar. Los apartados superiores de la mecánica requieren un aparato matemático más complejo y delicado.

Existen, sin embargo, problemas matemáticos en cuya resolución pueden emplearse con éxito las nociones y leyes físicas; (véase, por ejemplo, capítulos IV y VI del libro «Líneas más cortas» por L. A. Lustérnik, que constituye la 19ª obra de la serie de «Lecciones populares de matemáticas». Unos cuantos problemas de este género, resolucionados por medio de los métodos mecánicos (a saber, atrayendo las leyes de equilibrio) fueron indicados por el autor en su conferencia «Resolución de los problemas matemáticos con ayuda de los métodos mecánicos», citada para los alumnos de 7–8 grados en la Universidad Estatal de Moscú en el año 1956. Esta conferencia con algunas modificaciones insignificantes constituye el contenido del presente libro.

El autor expresa su profunda gratitud a Isaak M. Yaglom cuyas observaciones fundamentales contribuyeron a reforzar el carácter práctico de este libro.

§ 1
PROBLEMA ACERCA DE LA TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA

Sabemos que se llama *tangente* a una circunferencia a una recta que tiene con esta circunferencia exactamente un punto común (llamado *punto de tangencia*). En los manuales de la geometría se demuestra que la tangente es perpendicular al radio trazado del centro de la circunferencia al punto de tangencia. Demos a conocer la demostración de este teorema basada en los razonamientos de la mecánica.

Con este fin hagamos mentalmente un experimento siguiente. Vamos a imaginarnos que una carga sujetada al extremo M de un hilo está colgada de éste último; el otro extremo del hilo está sujeto en el punto O. De la experiencia de cada día el lector sabe, por supuesto, que en este caso

(A) *La carga ocupa una posición más baja de todas las posiciones que ella puede ocupar siendo atada al hilo.*

Este hecho que tiene la importancia decisiva para nuestros razonamientos, es en sí absolutamente evidente; no obstante, es útil indicar que él es una manifestación particular de cierta ley general (enunciada en el llamado «principio del mínimo de la energía potencial») la que enfrentaremos en la situación más compleja revelada en el § 4. Para precisar, con ayuda del mencionado «principio del mínimo de la energía potencial» la afirmación (A) se deduce de la siguiente obvia afirmación (E):

(E) *Existe una sóla posición de equilibrio de la carga*, es decir, la posición de la carga en reposo se determina totalmente por la posición del punto O y por la longitud del hilo.

De la unicidad de la posición de equilibrio (afirmación E) se desprende, además, que

(C) *La carga se ubica en una recta vertical trazada del punto de suspensión.*

Efectivamente, si la carga no estuviera en esta recta vertical, entonces, haciendo girar el hilo junto con la carga alrededor de esta vertical, obtendríamos una nueva posición de equilibrio (fig. 1). En este razonamiento nos apoyamos, pues, sobre el otro hecho conocido de la experiencia:

(S) *Si un cuerpo o un sistema de cuerpos equilibrados se hace girar alrededor de una recta vertical, la nueva posición será también la posición de equilibrio.*

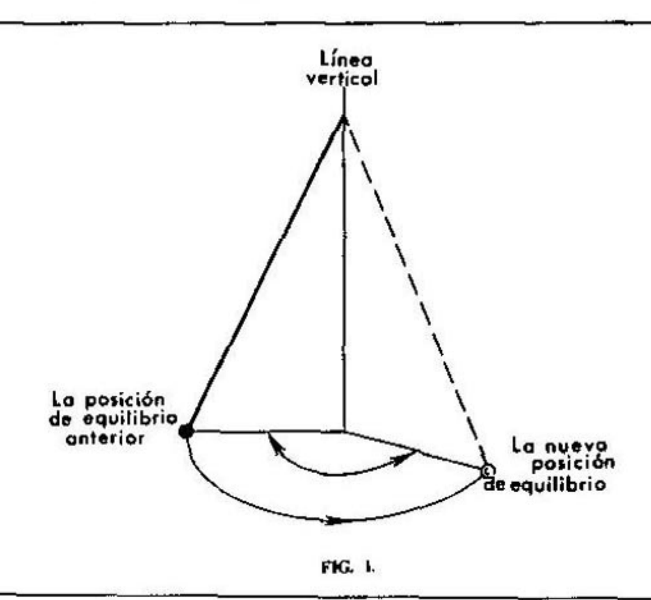


FIG. 1.

De las afirmaciones (A) y (C) se deduce que

(B) *La distancia de la carga hasta el punto de suspensión O es igual a la longitud del hilo MO* (esto significa que el hilo está tendido).

(Observemos de paso que las afirmaciones (B) y (C) son, por supuesto, no menos evidentes en comparar con aquellas de las cuales las hemos deducido).

Pasemos ahora a la demostración de nuestro teorema. Sean dadas (fig. 2) una circunferencia con el centro en el punto O y una recta p, tangente a la circunferencia en el punto P. Se debe demostrar que $OP \perp p$. Dibujemos nuestro croquis en una pared vertical de una manera tal que la recta p sea horizontal, y la circunferencia esté dispuesta *por encima* de la recta p. (Si ponemos este folleto verticalmente con tal de que se apoye sobre su corte inferior, la fig. 3 corresponderá a los requisitos que acabamos de mencionar). Indiquemos que en este caso P será el punto más

inferior de la circunferencia. Tomemos, ahora, un hilo cuya longitud es igual al radio de la circunferencia, y fijemos un extremo del hilo en el centro *O* de la circunferencia. Al otro extremo, el cual

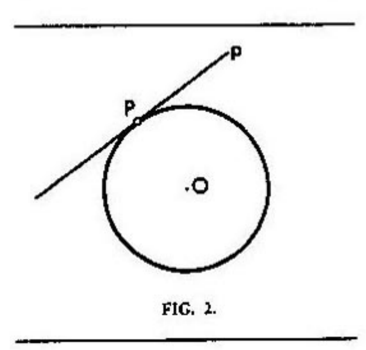


FIG. 2.

designaremos con la letra *M*, sujetemos una carga y la dejemos colgar del hilo. Mostremos que el extremo *M* caerá en el punto *P*. En efecto, en primer lugar, en virtud de (B) el extremo *M* puede encontrarse solamente en la circunferencia; en segundo lugar,

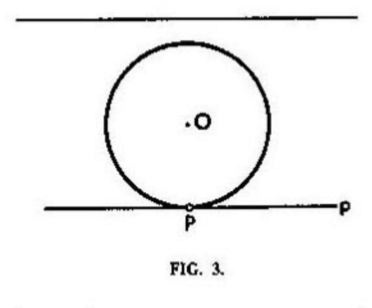


FIG. 3.

en virtud de (A), este extremo ocupa la posición más inferior de esta circunferencia, es decir, se ubica en el punto *P*. De este modo, el hilo se tenderá a lo largo del radio *OP*. Por consiguiente, en virtud de (C), este radio es perpendicular a la recta *p*, lo que se trataba de demostrar.

El ejemplo expuesto no es muy interesante, puesto que está dedicado a la demostración del teorema bien conocido y suficientemente sencillo. Sin embargo, en lo sucesivo este método lo vamos

a aplicar a la demostración de otros teoremas nuevos. Nos resultará útil la experiencia adquirida en este párrafo en la demostración «mecánica» del teorema sobre la tangente a una circunferencia. En el párrafo que sigue nos ocuparemos, ante todo, de la generalización natural de este teorema, a saber, del teorema acerca de la tangente a una elipse.

§ 2 PROBLEMA ACERCA DE LA TANGENTE A UNA ELIPSE

Una circunferencia se determina como el lugar geométrico de los puntos A tales que la distancia AO de estos puntos al punto dado O es igual a un número prefijado l. La definición de una elipse es la generalización de la definición indicada. Se llama *elipse* (fig. 4) el lugar geométrico de tales puntos A que la suma

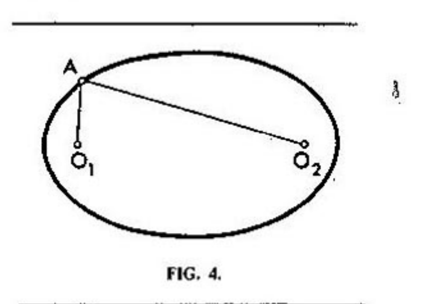


FIG. 4.

de las distancias $AO_1 + AO_2$, medidas desde estos puntos hasta los puntos dados O_1 y O_2, es igual al número prefijado l. Los puntos O_1 y O_2 se denominan *focos* de la elipse, y l es *la longitud del eje mayor* de la elipse. Los segmentos AO_1 y AO_2, que unen cualquier punto A en la elipse con los focos, se llaman *radios focales* trazados al punto A. Toda circunferencia es un caso particular de la elipse, cuando los puntos O_1 y O_2 coinciden. Los radios focales en este último caso también coinciden y son iguales al radio de la circunferencia.

Cada uno puede dibujar una elipse, si toma una cuerda y sujeta ambos extremos de ésta en cualesquiera puntos O_1 y O_2, elegidos en una hoja de papel de tal manera que la distancia O_1O_2 sea menor que la longitud de la cuerda, y luego, siempre teniendo tendida la cuerda por la punta de un lápiz, traza una línea (fig. 5).

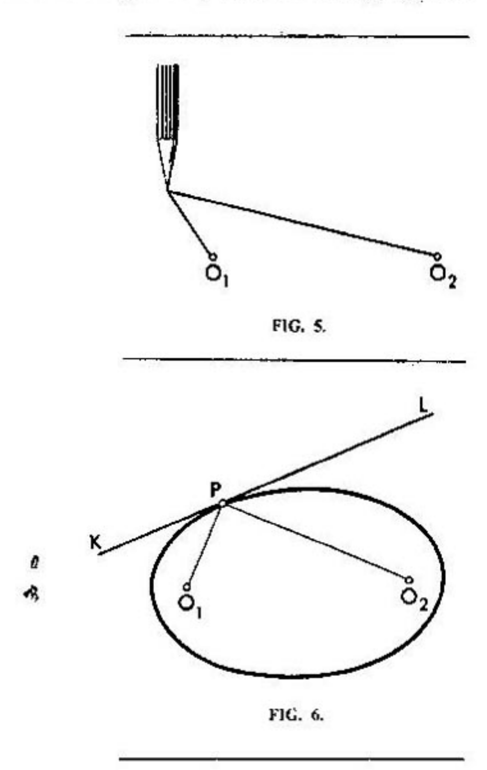


FIG. 5.

FIG. 6.

De las propiedades de la elipse se trata en el libro «Curvas maravillosas» que se debe a A. I. Markushévich y consituye la cuarta obra de la serie «Lecciones populares de matemáticas».

Igual que en el caso de una circunferencia, una recta se denomina *tangente* a la elipse, si tiene con ésta exactamente un punto común (fig. 6).

Tiene lugar el siguiente *teorema sobre la tangente a una elipse: la tangente a una elipse y los radios focales, trazados al punto de tangencia, forman ángulos iguales* (en la fig. 6 estos ángulos iguales están representados por los ángulos KPO_1 y LPO_2).

El caso particular de este teorema es el teorema sobre la tangente a una circunferencia. En efecto, en el caso de una circunferencia ambos radios focales coinciden, por lo que el teorema acerca de la tangente a una elipse se enuncia para el caso de la circunferencia así: la tangente forma los ángulos adyacentes iguales con el radio trazado al punto de tangencia; esto precisamente significa la perpendicularidad del radio a la tangente.

Proporcionaremos, ahora, la demostración del teorema sobre la tangente a una elipse que es análoga a la que ya damos para el teorema acerca de la tangente a una circunferencia. Recomendamos que el lector mismo trate de idear tal demostración «mecánica», antes de leer el texto a seguir.

Lo mismo que en el párrafo antecedente, antepondremos a la demostración un cierto experimento mecánico. En un plano vertical fijemos dos puntos $\bar{O}_1$ y $\bar{O}_2$ de igual altura. Tomemos luego un hilo, cuya longitud es superior a la distancia $\bar{O}_1\bar{O}_2$, y atemos los extremos de este hilo a los puntos $\bar{O}_1$ y $\bar{O}_2$. Coloquemos una carga en el hilo de tal manera que ésta pueda deslizar libremente a lo largo del hilo (por ejemplo, hagamos pasar el hilo a través del ojete de una pesa, como lo muestra la fig. 7). Ahora, si dejamos

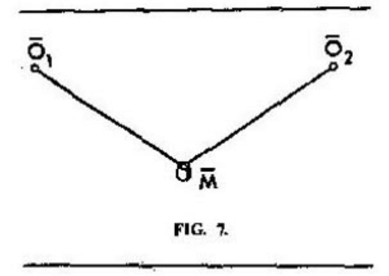


FIG. 7.

que la carga cuelge libremente del hilo, ésta llegará, al fin y al cabo, a cierto punto $\bar{M}$, donde se encontrará en estado de reposo. Es evidente que tienen lugar aquí dos hechos siguientes:

($\bar{C}_1$) *El plano* $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{M}$ *es vertical* (es decir, pasa por una recta vertical).

($\bar{C}_2$) *Los ángulos formados por los segmentos* $\bar{M}\bar{O}_1$ *y* $\bar{M}\bar{O}_2$ *con una recta horizontal trazada por el punto* $\bar{M}$ *en el plano* $\bar{M}\bar{O}_1\bar{O}_2$, son iguales.

Indiquemos que las afirmaciones ($\bar{C}_1$) y ($\bar{C}_2$) pueden deducirse de la afirmación acerca de la unicidad de la posición de equilibrio de la carga.

Con este fin, por el centro del segmento $\bar{O}_1\bar{O}_2$ tracemos una recta vertical y hagamos girar nuestro hilo, junto con la carga, el ángulo 180° alrededor de esta recta. El extremo $\bar{O}_1$ del hilo llegará al punto $\bar{O}_2$, mientras que el extremo $\bar{O}_2$, en el punto $\bar{O}_1$. De acuerdo con la afirmación (S) del párrafo anterior, obtendremos un estado de equilibrio, razón por la cual, en virtud de la unicidad presupuesta de este estado, el hilo (y también el triángulo $\bar{M}\bar{O}_1\bar{O}_2$) coincidirá con su estado inicial. Una vez el triángulo ha girado 180°, coincide con él mismo, es decir, el eje de rotación está en el plano del triángulo. Por consiguiente, el plano $\bar{M}\bar{O}_1\bar{O}_2$ pasa por el eje vertical, o sea, es vertical. Además, en el giro efectuado, la recta vertical trazada por $\bar{M}$ en el plano $\bar{M}\bar{O}_1\bar{O}_2$ coincidirá con ella misma, y el ángulo formado por la recta y el segmento $\bar{M}\bar{O}_1$ coincidirá con el ángulo entre esta recta y el segmento $\bar{M}\bar{O}_2$. Por lo tanto, estos ángulos son iguales.

Librémonos, ahora, de la suposición de que los puntos de suspensión son de igual altura. Sean O_1 y O_2 los puntos arbitrarios. Coloquemos una carga deslizable por el hilo que une los puntos O_1 y O_2 (fig. 8). Supongamos que, siendo en reposo, la carga se

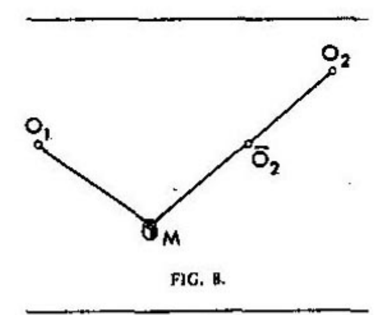


FIG. 8.

ubica en el punto M. Observemos que, si la carga se encuentra en M y si sujetamos el hilo en cualquiera de sus puntos, la posición de la carga no se alterará. (Efectivamente, si, digamos, sujetamos el hilo en el punto $\bar{O}_2$, véase fig. 8, entonces, la tensión del trozo $\bar{O}_2O_2$ del hilo se sustituirá por la reacción del apoyo en el punto $\bar{O}_2$). Esta circunstancia nos permite generalizar las deducciones obtenidas al considerar el caso de los puntos de igual altura de suspensión. En efecto, es suficiente sujetar el hilo en el punto $\bar{O}_2$ que está dispuesto a la misma altura con el punto O_1 (fig. 8[1]); la posición

[1] En el dibujo O_2 es superior a O_1; el caso en que O_1 es superior a O_2 se considera de una manera análoga.

de equilibrio no variará. Al hacer $\bar{O}_1 = O_1$, llegaremos al caso de los puntos de suspención $\bar{O}_1$ y $\bar{O}_2$ de igual altura, el cual fue examinado antes. Por esta razón, de $(\bar{C}_1)$ y $(\bar{C}_2)$ se desprenden inmediatamente las afirmaciones $(\bar{C}_1)$ (evidente de por sí) y $(\bar{C}_2)$:

(C_1) *El plano* O_1O_2M *es vertical.*

(C_2) *Los ángulos formados por los segmentos* MO_1*y* MO_2 *con la recta horizontal, trazada por el punto* M *en el plano* MO_1O_2, *son iguales.*

Son, evidentemente, válidas, por fin, dos afirmaciones siguientes:

(A) *La carga equilibrada se ubica en la posición más baja de todas las posiciones que ella puede ocupar siendo atada al hilo* (esta afirmación se deduce de la unicidad de la posición de equilibrio, valiéndose del princípio del mínimo de la energía potencial, citado en el § 1).

(B) *En la posición de equilibrio el hilo está tendido* (esto significa que los segmentos MO_1 y MO_2 del hilo son rectilíneos y, por consiguiente, la suma de las distancias del punto M a O_1 y O_2 es igual a la longitud del hilo).

Volvamos a la demostración del teorema acerca de la tangente. Sea dada una elipse con los focos O_1 y O_2 (véase fig. 6) y con el eje mayor de longitud l; sea dada, además, la recta KL que es tangente a la elipse en el punto P. Es necesario demostrar que $\angle O_1PK = \angle O_2PL$. Para demostrar, hagamos virar el dibujo de tal manera que el plano de éste se haga vertical, la recta KL, horizontal, mientras que la elipse esté dispuesta por encima de la recta KL (en este caso P será el punto más inferior de la elipse). Tomemos un hilo de longitud l, le pongamos una carga, fijemos los extremos del hilo en los puntos O_1 y O_2, después de lo cual libremos la carga. Este ocupará cierta posición M. En virtud de (C_1), el punto M se ubicará en el plano del dibujo. En virtud de (B), el punto citado pertenecerá a la elipse. En virtud de (A), el punto coincidirá con P. De este modo, la posición del hilo coincidirá con los segmentos PO_1 y PO_2. En virtud de (C_2), los ángulos formados por estos segmentos con la recta KL, serán iguales.

En el libro «Líneas más cortas» de L. A. Lustérnik el lector encontrará (en el § 11) otra demostración de este teorema que también se hace con la utilización de los razonamientos de la mecánica.

La propiedad de la tangente a una elipse de formar con los radios focales los ángulos iguales presta la posibilidad de construir la tangente a la elipse en el punto dado (una vez dados los focos de la

elipse), empleando con este objeto un compás y una regla. Para esto es suficiente trazar las rectas por el punto de tangencia P y los focos O_1 y O_2 (véase fig. 9) y hallar la bisectriz del ángulo SPO_2 (o bien, del ángulo TPO_1). Esta bisectriz será la tangente a la elipse.

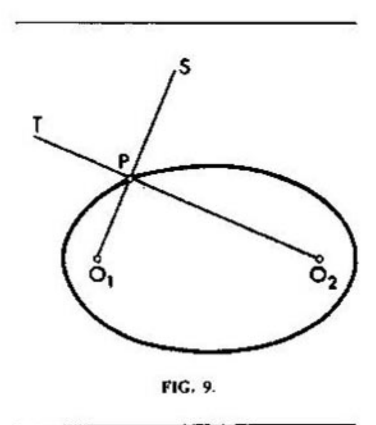


FIG. 9.

El teorema acerca de la tangente a una elipse tiene una interpretación óptica muy interesante: si nos imaginamos que la elipse posee las propiedades de un espejo, es decir, que los rayos luminosos que se propagan en el plano son reflejados por la elipse, entonces, los rayos que se emiten de la fuente de la luz ubicada en uno de los focos, se acumularán en el otro foco (fig. 10).

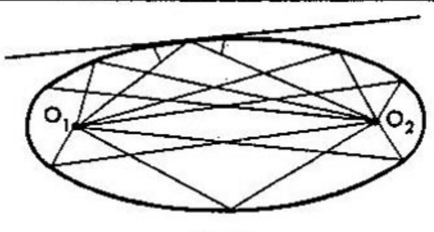


FIG. 10

Efectivamente, el ángulo que forma el rayo incidente con la elipse es igual, según las leyes ópticas, al ángulo que forma con la elipse el rayo reflejado. El ángulo formado por una recta y una curva (en el caso

dado, por el rayo luminoso y la elipse) se mide por el ángulo entre esta recta y la tangente a la curva trazada en el vértice del ángulo. Puesto que el rayo incidente va a lo largo del radio focal, entonces, en virtud del teorema demostrado, el rayo reflejado irá a lo largo del otro radio focal.

§ 3 PROBLEMAS ACERCA DE LAS TANGENTES A UNA PARÁBOLA Y UNA HIPÉRBOLA

Se denomina *parábola* (fig. 11) el lugar geométrico de los puntos P, equidistantes de un punto fijo F (llamado *foco* de la parábola) y de una recta fija d, llamada *directriz* de la parábola. (Para mayores pormenores de la parábola, véase el libro de A. I. Markushévich ya citado). La parábola divide el plano en dos partes: en una de las partes se encuentra la directriz, en la otra (zona rayada en la fig. 12), el foco. Una recta que tiene con la parábola exactamente un punto común y que está enteramente dispuesta en una de las partes, en las que el plano se divide por la parábola, recibe el nombre de *la tangente* a la parábola. En la fig. 13, la recta p es la tangente mientras que la recta q no lo es, aunque tiene con la parábola sólo un punto común.

Resulta válido el siguiente *teorema acerca de la tangente a una parábola*: *si del punto arbitrario P de la parábola* (fig. 14) *trazamos el segmento PF, que une P con el foco, y el segmento PD que sea perpendicular a la directriz, entonces, los ángulos formados por estos segmentos con la tangente p en el punto P son iguales* (asi, en la fig. 14, $\angle DPK = \angle KPF$).

Este teorema puede ser «demostrado» a base de los razonamientos «mecánicos», por analogía con los teoremas de los dos párrafos antecedentes. Demos aquí un esquema de tal «demostración».

A una distancia arbitraria l de la recta d tracemos la recta $d' \parallel d$ de una manera tal, sin embargo, que el punto P se ubique entre d y d'. Hagamos virar el dibujo con tal modo de que éste se disponga en un plano vertical, mientras que la tangente p sea

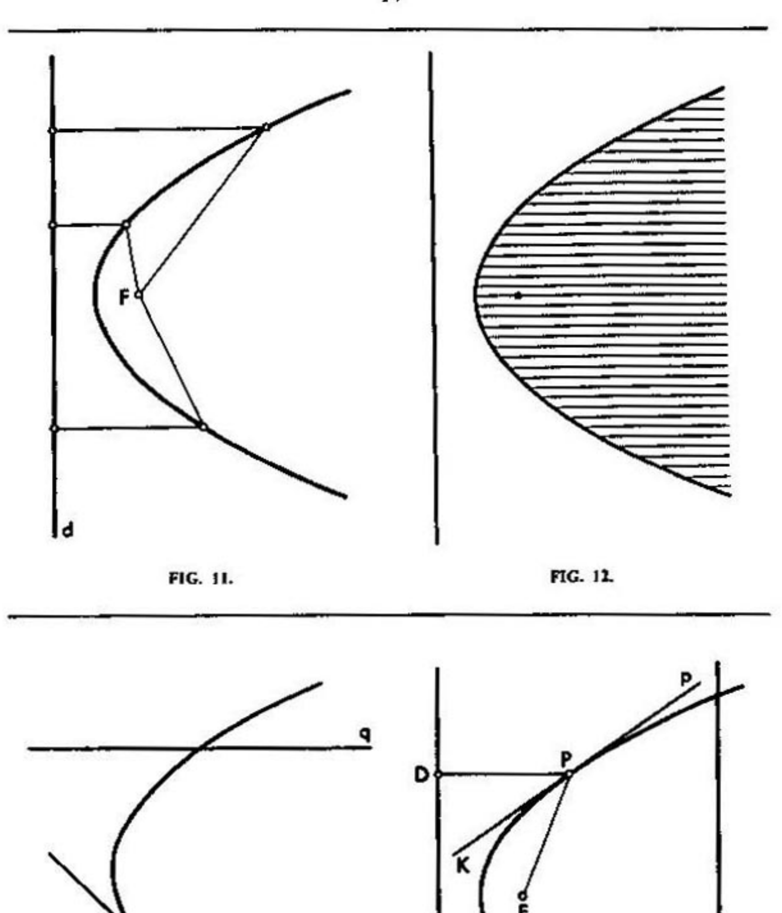


FIG. 11.

FIG. 12.

FIG. 13.

FIG. 14.

horizontal y la parábola resulte dispuesta por encima de p. Imaginémonos la recta d' en forma de una varilla delgada por la cual se desliza el anillo (fig. 15). Sujetemos al anillo un hilo de longitud l, el otro extremo del hilo lo fijemos en el punto F.

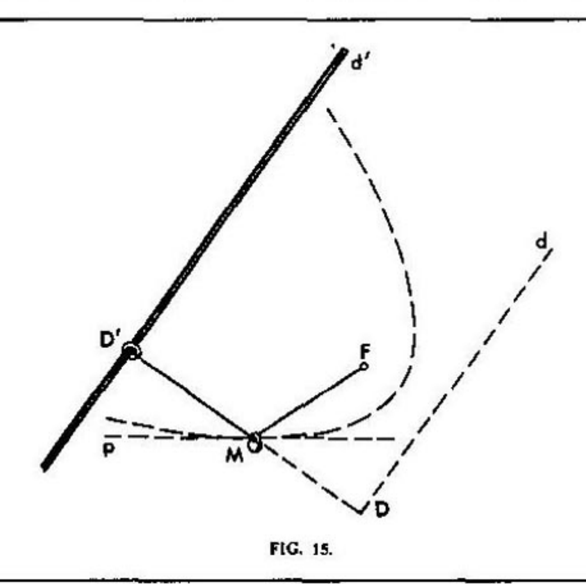


FIG. 15.

Coloquemos en el hilo una carga corrediza. Supongamos que M es la posición de equilibrio de la carga y D' es la posición del anillo en este instante. El hilo estará bien tendido, por lo que sus segmentos MF y MD' serán rectilíneos. Indiquemos, ante todo, que

$$MD' \perp d'. \qquad (1)$$

(Si no fuera así, entonces, como se desprende de la fig. 16, la componente T_1 de la fuerza de tensión T del hilo a lo largo de la varilla d' sería distinta de cero y haría desplazarse el anillo). A continuación, reiterando los razonamientos del párrafo anterior, establecemos, en primer lugar, que los ángulos formados por los segmentos MD' y MF con la recta p, son iguales y que, en segundo lugar,

$$MD' + MF = l. \qquad (2)$$

Tracemos $MD \perp d$. Como la distancia entre d y d' es igual a l, entonces, de (1) y (2) se deduce que

$$MD = MF. \qquad (3)$$

Esto significa que M se encuentra en la parábola, con la particularidad de que ocupa en ella una posición más baja, mientras que P es el punto inferior de la parábola, razón por la cual M coincidirá con P.

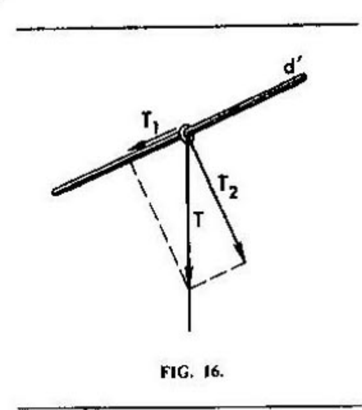


FIG. 16.

Por consiguiente, al fin de cuentas, los ángulos formados por los segmentos PF y PD con la recta p, son iguales.

En el libro «Líneas más cortas» de L. A. Lustérnik se da otra demostración de este teorema, también «mecánica». Las propiedades de los ángulos formados por la tangente a la parábola nos permiten construir esta tangente, valiéndose de un compás y una regla.

La interpretación óptica del teorema demostrado es como sigue: los rayos luminosos eminentes del foco de la parábola se reflejan de ésta y se convierten en un haz cuyos rayos van en la dirección perpendicular a la directriz de la parábola (fig. 17). Esta propiedad de la curva se utiliza en los proyectores, reflectores u otros dispositivos destinados para comunicar a los rayos (luminosos o térmicos) la dirección necesaria: la superficie reflectora de cada uno de estos dispositivos representa una superficie, engendrada por la revolución de una parábola alrededor de la perpendicular trazada del foco a la directriz.

Se llama *hipérbola* un lugar geométrico de tales puntos cuya diferencia entre las distancias hasta dos puntos fijados F_1 y F_2

(denominados *focos*) es constante. (Acerca de la hipérbola véase también el libro «Curvas maravillosas de A. I. Markushévich). Como muestra la fig. 18, la hipérbola consta de dos porciones. La distancia entre cualquier punto P' de la porción izquierda (fig. 18) y F_1 *es menor*, en una magnitud dada, que la distancia

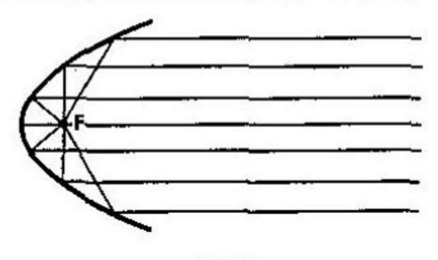


FIG. 17.

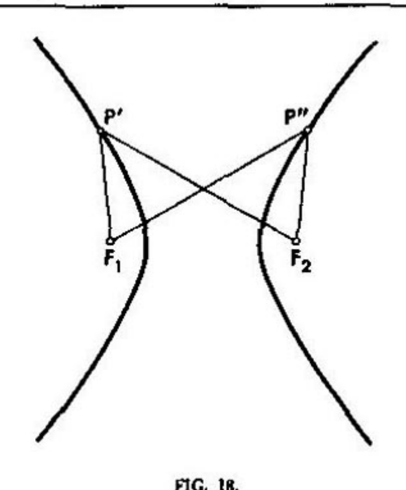


FIG. 18.

de P' hasta F_2; la distancia entre cualquier punto P'' de la porción derecha y F_2 *es menor*, en la misma magnitud, que la distancia de P'' hasta F_1. Igual que en el caso de una parábola, cada porción de la hipérbola divide el plano en dos partes. Una recta dispuesta por entero en una de estas partes y que tiene con la porción dada exactamente un punto común, se denomina *tangente a la porción*

dada de la hipérbola. En la fig. 19 se muestra la recta que es tangente a la porción izquierda de la hipérbola en el punto P. Puede demostrarse que la tangente a una de las porciones de la hipérbola no corta la otra porción. Toda tangente a una de las porciones de la hipérbola se llama también simplemente *tangente a la hipérbola.*

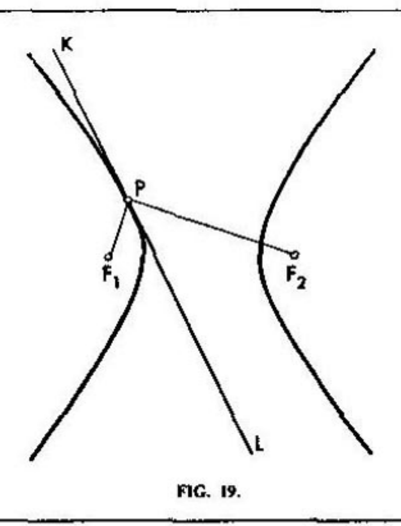


FIG. 19.

Como en el caso de la elipse, los segmentos rectilíneos que unen los focos con un punto de la hipérbola, se denominan *radios focales.*

He aquí *el teorema sobre la tangente a una hipérbola*: *la tangente a una hipérbola y los radios focales, trazados al punto de tangencia, forman ángulos iguales* (así, en la fig. 19, $\angle F_1PL = \angle LPF_2$).

No vamos a dar aquí la demostración de este teorema (que sea al cargo del propio lector); sólo indiquemos una construcción «mecánica» que yace en la base de la demostración. Según la definición de hipérbola, la diferencia entre los radios focales es una magnitud constante; designémosla por a. Supongamos que el punto de tangencia P se encuentra en la porción derecha (fig. 20). Utilizando el foco izquierdo F_1 como centro, tracemos la circunferencia de radio r tan grande que, en primer lugar, $r > a$, y que, en segundo lugar, el punto P se ubique dentro de esta circunferencia.

Imaginémonos la circunferencia en forma de un anillo de alambre por el cual se desliza otro anillo pequeño.

Tomemos un hilo de longitud $r-a$ y lo hagamos pasar a través de una carga que puede desplazarse por el hilo. Fijemos un extremo

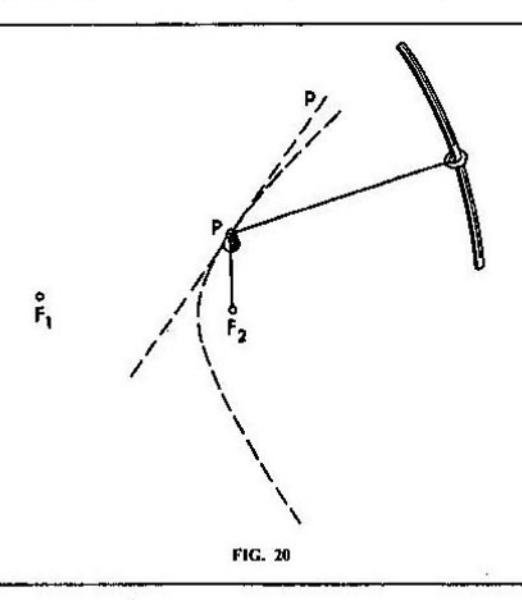


FIG. 20

del hilo al anillo pequeño y el otro extremo lo sujetemos en el foco derecho F_2. Si viramos el dibujo de tal manera que la recta p (la tangente) sea horizontal y la porción correspondiente de la hipérbola resulte dispuesta por encima de la recta p, entonces el punto P será, para la carga colocada en el hilo, la posición de reposo. Precisamente esta circunstancia nos permite demostrar el teorema, valiéndose de los razonamientos ya aplicados. Observemos que si el punto de tangencia se encuentra en la porción izquierda, se puede repetir la construcción, trazando la circunferencia con el centro en el foco derecho. No obstante, en este caso se puede también valerse de la circunferencia con el centro en el foco izquierdo, mas la longitud del hilo debe ser $r + a$.

Análogamente a los teoremas anteriores acerca de las tangentes, el teorema de la tangente a una hipérbola proporciona el método para la construcción de la curva.

§ 4
PRINCIPIO DEL MÍNIMO DE LA ENERGÍA POTENCIAL

Una carga, elevada a cierta altura, al caer, es capaz de producir trabajo, es decir, la carga posee energía potencial. Como es sabido del curso escolar de la física, la energía potencial de la carga de peso q, elevada a la altura h, se mide por el producto qh. Vemos que la energía potencial es tanto menor cuanto menor es la altura de la carga. La tendencia de la carga a ocupar la posición más inferior está ligada al hecho de que la energía potencial tiende a disminuir. Si la carga está fijada a un hilo, en la posición inferior extrema de la carga, la energía potencial será mínima. Por eso, la afirmación (A), que desempeñó el papel decisivo al demostrar los teoremas de las tangentes y que dice que en el estado de equilibrio la carga ocupa la posición inferior extrema, es equivalente a la siguiente afirmación:

(U) *La energía potencial de la carga en la posición de equilibrio alcanza su valor mínimo.*

La afirmación (U), a su vez (y, por lo tanto, también (A)) es un corolario de la afirmación (E) de la unicidad de la posición de equilibrio y de otra afirmación siguiente:

(D′) *Si en cierta posición de la carga su energía potencial alcanza el valor mínimo, esta posición es la de equilibrio.*

Para obtener (U), basta indicar que si la energía potencial de la carga no alcanzara su valor mínimo en la posición de equilibrio, en virtud de (D′) existiría otra posición de equilibrio correspondiente al valor mínimo de la energía potencial, lo que contradice a la afirmación (E).

La afirmación (D′) es un caso particular del principio general de la mecánica llamado principio del mínimo de la energía potencial o bien el principio de Dirichlet (la argumentación de este principio véase, por ejemplo, en el § 13 del libro de L. A. Lustérnik ya citado más arriba). El principio de Dirichlet enuncia:

Aquella posición del sistema en la que la energía potencial alcanza su valor mínimo es la posición de equilibrio.

Si la posición de equilibrio es única, el principio de Dirichlet admite un importante corolario:

En la posición de equilibrio la energía potencial del sistema alcanza su valor mínimo.

La deducción de este corolario es análoga a la de la afirmación (U).

En lo sucesivo sólo vamos a considerar aquellos casos en que la posición de equilibrio es única (son posibles también otros casos; así, por ejemplo, en la fig. 21 se muestran cuatro posiciones de equilibrio de una bola).

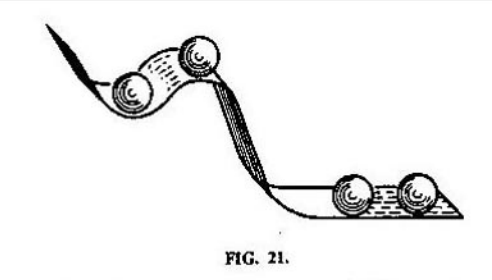


FIG. 21.

Está claro que para resolver los problemas de las tangentes no hay necesidad de recurrir al principio del mínimo de la energía potencial; el hecho de que la carga ocupa la posición inferior extrema de todas las posiciones eventuales es en sí obvio. No obstante, en otros casos, cuando en lugar de una sola carga intervienen unas cuantas cargas ligadas entre sí, sería erróneo afirmar que en la posición de equilibrio cada una de ellas ocupa la posición inferior extrema de todas las posiciones posibles; en este último caso nos vemos obligados a encontrar las posiciones de todas las cargas para lo que suele ser cómodo emplear la noción de la energía potencial.

Demos un ejemplo.

En el excelente libro «Caleidoscopio matemático» (Editorial «Gostechizdat», 1949 en ruso) que se debe a G. Schteingauz, este matemático polaco da el siguiente problema (tema 39).

Es necesario edificar una escuela común para tres aldeas. En la primera aldea viven 50 niños, en la segunda 70, y en la tercera aldea 90 niños. ¿Dónde se debe escoger el lugar para la escuela para que el tiempo total que han de gastar todos los niños para concurrir a las clases sea mínimo?

Para resolver este problema es suficiente poner sobre una mesa el mapa del terreno (fig. 22), barrenar agujeros donde se encuentran las aldeas, hacer pasar a través de estos agujeros tres cuerdas y atar los cabos superiores de éstas con un nudo; de los cabos inferiores se suspenden las cargas de 50, 70 y 90 unidades (por ejemplo, de 500, 700 y 900 gramos), respectivamente. La escuela debe levantarse en el punto donde se ubicará el nudo ¿por qué?

Para contestar a la pregunta «¿por qué?», levantada en el problema, calculemos la energía potencial del sistema que en el caso considerado se compone de tres cargas. Si los pesos de las cargas son q_1, q_2 y q_3, y si h_1, h_2 y h_3 son las alturas de las cargas respectivas, entonces la energía potencial del sistema será igual a la suma de las energías potenciales de las cargas por separado:[1]

$$E = q_1h_1 + q_2h_2 + q_3h_3. \tag{1}$$

Supongamos que r_1, r_2, r_3 son las distancias del nudo al primero, segundo y tercero poblados, respectivamente; l_1, l_2, l_3 son las longitudes de la primera, segunda y tercera cuerdas, y h es la altura de la mesa. Evidentemente, cualquiera que sea el punto en que se encuentre el nudo, se cumplen las correlaciones

$$r_1 + (h - h_1) = l_1, \quad r_2 + (h - h_2) = l_2, \quad r_3 + (h - h_3) = l_3$$

o bien

$$h_1 = r_1 + h - l_1, \quad h_2 = r_2 + h - l_2, \quad h_3 = r_3 + h - l_3,$$

no importa que sean las alturas h_1, h_2, h_3.

Entonces, la igualdad (1) puede escribirse en la forma

$$E = q_1r_1 + q_2r_2 + q_3r_3 + C,$$

donde $C = (q_1 + q_2 + q_3)h - q_1l_1 - q_2l_2 - q_3l_3$ es una constante que no depende de las posiciones que ocupan las cargas.

En virtud del principio del mínimo de la energía potencial concluimos que si E admite el valor mínimo, el sistema está equilibrado. De aquí se deduce, partiendo de la suposición de la unicidad de la posición de equilibrio, que en el estado de equilibrio

[1] Efectivamente, la energía potencial se mide por el trabajo que puede ser producido. Si cortamos los hilos, cada carga producirá, al caer, un trabajo igual a su energía potencial. El trabajo producido por todo el sistema es igual a la suma de los trabajos producidos por cada una de las cargas.

50
90
70
50
90
70

FIG. 22.

el valor de E es mínimo. Mas, si el valor de E es mínimo, la magnitud

$$T = q_1 r_1 + q_2 r_2 + q_3 r_3 = E - C$$

también será mínima. Pero T expresa precisamente el tiempo total que gastan los niños para llegar, partiendo de sus poblados respectivos, a la escuela cuya ubicación está marcada por el nudo. Así que, con la posición del nudo, correspondiente al equlibrio del sistema, esta suma de tiempo alcanza en realidad su valor mínimo.

§ 5 PUNTOS MATERIALES Y CENTRO DE GRAVEDAD

Hasta ahora no nos interesaban las dimensiones de las cargas que se colgaban de hilos. De los razonamientos empleados se ve que, por un lado, suponíamos las cargas muy pequeñas en dimensiones (tan pequeñas que la posición de cada una de ellas podíamos tomar por un punto), por otro lado, las asignábamos los pesos determinados y, por lo tanto, las masas.

Las semejantes consideraciones nos conducen a uno de los conceptos más importantes de la mecánica, al concepto del punto material. Por el punto material én la mecánica se entiende un cuerpo tan pequeño que sus dimensiones pueden ser despreciadas. El punto material puede imaginarse como un punto geométrico al cual se le asigna un número determinado (masa). Ha de notarse que, como un punto material tiene la masa determinada, tiene también el determinado peso.

Si existe cierto sistema de puntos materiales, cada uno de los puntos es accionado por la fuerza de gravedad que es proporcional a la masa del punto. La resultante de todas estas fuerzas paralelas está aplicada a un punto singular, llamado centro de gravedad del sistema dado de puntos materiales. La posición del centro de gravedad se determina por las posiciones de los puntos del sistema y por sus masas.

En la mecánica se supone que cada cuerpo consiste del gran número de puntos materiales. Estos puntos materiales tienen, hablando en general, masas diferentes, de modo que la distribución de la masa en el interior del cuerpo no es uniforme: unas partes del cuerpo tienen la mayor masa y otras, la masa menor. Admitiremos incluso que ciertas partes del cuerpo, en general, están privadas de la masa y son, por consiguiente, «imponderables» [1]. El centro de gravedad del sistema de puntos materiales que forman el cuerpo, se llama, por definición, centro de gravedad del propio cuerpo. Si la masa del cuerpo está concentrada en el número finito de sus puntos (tales casos los vamos a enfrentar en lo sucesivo, por ejemplo, una vara sin peso en la cual están colocadas unas cargas distribuidas puntuales), entonces, el centro de gravedad del cuerpo de este género coincide, evidentemente, con el centro de gravedad del sistema de estos puntos separados.

Varias propiedades del cuerpo dependen exclusivamente de la posición de su centro de gravedad. Como es sabido del curso escolar de la física, el equilibrio del cuerpo depende de la posición mútua de su centro de gravedad y del conjunto de los puntos en los que está sujetado este cuerpo. A saber, tienen lugar las siguientes afirmaciones:

Afirmación I. *Si el cuerpo, sujetado en un sólo punto, se encuentra en reposo, este punto y el centro de gravedad se disponen en una misma vertical* (fig. 23).

Afirmación II. *Si el cuerpo que tiene un área de apoyo o bien una arista de apoyo, se encuentra en reposo, entonces la vertical bajada del centro de gravedad, pasa por esta área o por la arista* (fig. 24).

De estas afirmaciones (que pueden emplearse para la búsqueda experimental del centro de gravedad) se deduce, en particular, la consideración siguiente: al sustituir cierto cuerpo por otro cuerpo, que tiene la misma forma y el mismo centro de gravedad, la posición de equilibrio no se alterará. Sin embargo, en toda una

---

[1] Para precisar, por un cuerpo sin peso (o bien, cuerpo de masa nula) entendemos el cuerpo con la masa tan pequeña que se puede menospreciar de ella. El lector notará el paralelismo que existe entre el concepto del punto material y el del cuerpo sin peso. El desprecio de la masa del cuerpo desempeña en la mecánica el papel no menos importante que el desprecio de la dimensión. Así, en todos los razonamientos anteriores despreciábamos de los pesos (¡ no de las dimensiones!) de los hilos.

serie de los casos se debe tomar en consideración, además de la posición del centro de gravedad, también la masa general del cuerpo (es decir, la masa total de los puntos materiales que

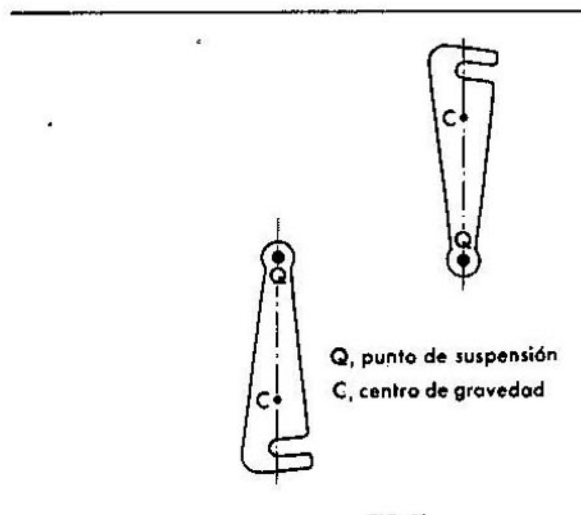


FIG. 23.

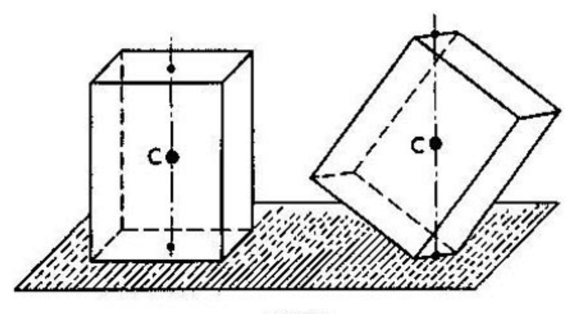


FIG. 24.

constituyen el cuerpo). Por ejemplo, si sustituimos no todo el cuerpo sino sólo *una parte* de éste por cierto otro cuerpo que tiene la misma forma y el mismo centro de gravedad que la parte sustituida, el equilibrio de *todo el cuerpo* puede alterarse, puesto

que la posición del centro de gravedad de todo el cuerpo puede cambiar a cuenta de la variación de la masa de una parte del cuerpo. Para la resolución de varios problemas, en cualquier caso para resolver los problemas que vamos a enfrentar en adelante, ya resulta suficiente conocer la posición del centro de gravedad y la masa total. Es natural, por esta razón, introducir las siguientes definiciones de la equivalencia de dos sistemas de puntos materiales.

Dos sistemas de puntos materiales son equivalentes, si, en primer lugar, el centro de gravedad del primer sistema coincide con el centro de gravedad del segundo sistema y, en segundo lugar, la suma de las masas de todos los puntos del primer sistema es igual a la suma de las masas de todos los puntos del segundo sistema.

El concepto introducido de la equivalencia es notable gracias al hecho de que al sustituir una parte de cierto sistema por el otro sistema que sea equivalente a la parte sustituida, llegaremos al sistema equivalente al sistema original. Enunciaremos esta afirmación en una forma más precisa.

Sea dado el sistema $\bar{\alpha}$ de puntos materiales $\bar{M}_1, \ldots, \bar{M}_r$, cuyas masas son $\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_r$, y sea dado el otro sistema $\underline{\alpha}$ de puntos materiales $\underline{M}_1, \ldots, \underline{M}_s$, cuyas masas son $\underline{m}_1, \ldots, \underline{m}_s$. Reunamos ambos sistemas en un sistema común α, el cual definiremos del modo siguiente:

1°. Incorporemos en α todo punto material del sistema $\bar{\alpha}$, que por su posición no coincide con ningún punto del sistema $\underline{\alpha}$.

2°. Incorporemos en α todo punto material del sistema $\underline{\alpha}$, que por su posición no coincide con ningúno de los puntos del sistema $\bar{\alpha}$.

3°. Si cierto punto material $\bar{M}_i$ del sistema $\bar{\alpha}$ coincide, por su posición, con algún punto material $\underline{M}_j$ del sistema $\underline{\alpha}$, entonces incorporemos en α un nuevo punto material cuya posición coincide con la posición de los puntos materiales $\bar{M}_i$ y $\underline{M}_j$, y cuya masa es igual a la suma $\bar{m}_i + \underline{m}_j$ de las masas de los puntos materiales citados. Es válida la siguiente

Afirmación III. *Si el sistema α es el resultado de la reunión de los sistemas $\bar{\alpha}$ y $\underline{\alpha}$, y el sistema β es el resultado de la reunión de los sistemas $\bar{\beta}$ y $\underline{\beta}$, y si los sistemas $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ son equivalentes y lo son los sistemas $\underline{\alpha}$ y $\underline{\beta}$, entonces los sistemas α y β son también equivalentes.*

Demostración de la afirmación III. Es evidente que las masas sumarias de los sistemas α y β coinciden. Mostremos que también coinciden los centros de gravedad de estos sistemas. La resultante de las fuerzas de

gravedad, que actúan en los puntos materiales del sistema α, puede hallarse de la manera siguiente: primero se halla la resultante $\bar{P}$ de las fuerzas de gravedad que actúan en $\bar{\alpha}$, luego se halla la resultante $\underline{P}$ de las fuerzas de gravedad que actúan en $\underline{\alpha}$, y, por fin, se halla la resultante P de estas resultantes. De la manera igual, la resultante Q de las fuerzas de gravedad que actúan en el sistema β puede hallarse como resultante de dos fuerzas, $\bar{Q}$ y $\underline{Q}$, donde $\bar{Q}$ es la resultante de las fuerzas que actúan en β, y $\underline{Q}$, la resultante de las fuerzas que actúan en $\underline{\beta}$. Por ser equivalentes $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$, las fuerzas $\bar{P}$ y $\bar{Q}$ coinciden. Al igual manera coinciden las fuerzas $\underline{P}$ y $\underline{Q}$, razón por la cual coinciden las resultantes de dichas fuerzas, P y Q. En particular, coinciden también los puntos de su aplicación, es decir, centros de gravedad de los sistemas α y β.

Indiquemos que para cualquier sistema de puntos materiales puede construirse un sistema equivalente, que se componga sólo de un punto material. Para ello es suficiente considerar el punto material que se encuentra en el centro de gravedad del sistema original y que posee la masa igual a la masa total del sistema. Dicho punto material precisamente forma el sistema equivalente al original. El punto material que está dispuesto en el centro de gravedad de cierto sistema y que tiene la masa igual a la masa total del sistema, lo llamaremos *centro material* del sistema dado. Los sistemas equivalentes son aquellos cuyos centros materiales coinciden.

§ 6
CENTRO DE GRAVEDAD DEL SISTEMA DE DOS PUNTOS MATERIALES

Supongamos que en un vástago imponderable están sujetadas dos cargas P y Q a la distancia d una de otra (fig. 25). Es menester hallar el centro de gravedad del sistema compuesta por dichas cargas. En virtud de la afirmación I del párrafo anterior, nuestro problema es equivalente al problema de hallar el punto donde se debe apoyarse el vástago para estar equilibrado. Designemos las distancias del punto buscado O a las cargas P y Q con u y v.

El equilibrio se observa cuando, y sólo cuando, el producto de la fuerza P el brazo u es igual al producto de la fuerza Q por el brazo v, es decir,

$$Pu = Qv \tag{1}$$

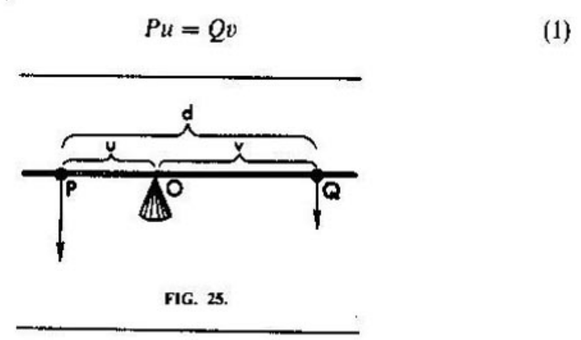


FIG. 25.

Al comparar la igualdad (1) con la igualdad

$$u + v = d, \tag{2}$$

obtenemos

$$u = \frac{Q}{P+Q}d, \quad v = \frac{P}{P+Q}d.$$

Indiquemos que $\frac{u}{v} = \frac{Q}{P}$, de modo que las distancias del centro de gravedad a las cargas es inversamente proporcional a las propias cargas.

En particular, si ambas cargas son iguales en peso, el centro de gravedad se ubica en el centro entre las cargas (lo que se ve de inmediato). Viceversa, si se sabe que el centro de gravedad se encuentra en el centro, de aquí se desprende que ambas cargas son iguales.

Si una de las cargas es dos veces mayor que la otra, el centro de gravedad se encuentra más cerca de la carga mayor, dividiendo la distancia entre las cargas en la relación 1:2, viceversa, si se sabe que el centro de gravedad divide la distancia entre las cargas en la relación 1:2, una de las cargas (aquélla que está más próxima al centro de gravedad) es dos veces mayor que la otra.

Puesto que el centro de gravedad del vástago cuya masa está concentrada en dos puntos, M y N, coincide con el centro de gravedad del sistema de dos puntos materiales M y N (con las masas correspondientes), obtenemos el siguiente resultado.

El centro de gravedad del sistema de dos puntos materiales se ubica en una recta que une dichos puntos. Su distancia de dichos puntos es inversamente proporcional a los pesos (y, por lo tanto, a las masas) de los puntos.

En particular, el centro de gravedad divide la distancia entre los puntos en dos partes iguales cuando, y sólo cuando, ambos puntos tienen pesos iguales; el centro de gravedad divide la distancia entre los puntos en la relación 1 : 2, cuando, y sólo cuando, uno de los puntos pesa dos veces más que el otro (en este caso, el centro de gravedad está más próximo al punto de peso mayor).

§ 7
TEOREMAS DE LAS RECTAS CRUZADAS

Examinemos un sistema de puntos materiales α que es la reunión de los sistemas γ y δ. Designemos por M y N los centros materiales de los sistemas γ y δ. En virtud de la afirmación III del § 5, el sistema de puntos materiales M y N es equivalente al sistema α. Por esta razón, el centro material del sistema α coincide con el centro material del sistema compuesto por los puntos M y N, y, por consiguiente, se encuentra en la recta que une estos puntos. Como el centro material del sistema está dispuesto en su centro de gravedad, obtenemos el siguiente teorema:

El centro de gravedad del sistema de puntos materiales, que es la reunión de los sistemas γ y δ, se encuentra en la recta que une los centros de gravedad de los sistemas γ y δ.

Demos a conocer, ahora, tres aplicaciones geométricas de este teorema.

Las medianas de un triángulo se intersecan en un punto. Coloquemos en los vértices de un triángulo las cargas puntuales de pesos iguales, las que designaremos con las mismas letras A, B y C que correspondeh a los vértices (fig. 26). Dividamos el sistema obtenido de puntos materiales en dos partes, γ y δ, de tal manera que A se incorpore en γ, mientras que B y C, en δ. El centro de gravedad del sistema γ se ubica en A, el centro de gravedad del sistema γ, en virtud de los resultados del párrafo antecedente, se encuentra

en el punto medio E del lado BC. Conforme al teorema enunciado a principios del presente párrafo, el centro de gravedad O del sistema A, B, C se encuentra en la mediana AE. De la manera sumamente igual nos convencemos de que O se ubica también en dos otras medianas. Por consiguiente, todas tres medianas se cortarán sin fallar en un punto.

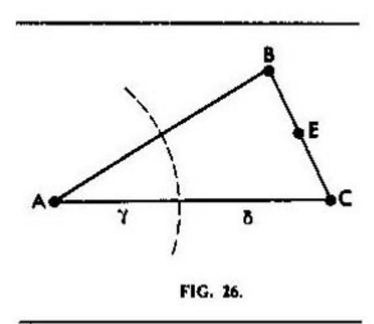


FIG. 26.

Puesto que el centro material M del sistema δ (que se dispone en el punto E) es dos veces más pesado que el centro material del sistema γ (el cual coincide con el punto material A), entonces el centro de gravedad del sistema $\{M, A\}$ divide el segmento EA en la relación $1:2$, encontrándose más próximo a E. Mas, dicho centro de gravedad es precisamente el centro de gravedad del sistema A, B, C, es decir, el punto común de intersección de todas las medianas. Hemos obtenido, pues, el conocido teorema de lo que el punto de intersección de las medianas corta en cada mediana una tercera parte de ésta, partiendo del lado correspondiente.

Cuadrilátero espacial. Sea dado el cuadrilátero espacial $ABCD$ (fig. 27). Mostremos que las rectas EF y KL, que unen los puntos medios de sus lados opuestos, se cortan. Coloquemos en los vértices del cuadrilátero los pesos iguales, tomándolos por los puntos materiales.

Igual que al «demostrar» el teorema de las medianas, es suficiente revelar que el centro de gravedad del cuadrilátero se encuentra en cada una de las rectas EF y KL. Mostremos, por ejemplo, que se halla en EF (lo que él se halla en KL se revela de la manera análoga). Con este fin, dividamos el sistema de puntos materiales A, B, C, D en dos partes; en una de estas partes incluyamos los puntos A y B, en la otra parte, C y D. El centro

de gravedad de la primera parte se dispondrá en el punto E; el centro de gravedad de la segunda parte, en el punto F. En virtud del teorema enunciado al principio del párrafo, el centro de gravedad de todo el cuadrilátero está dispuesto en la recta EF. Sea el cargo del propio lector de convencerse de que los segmentos EF y KL, al cortarse, se dividen en dos partes iguales.

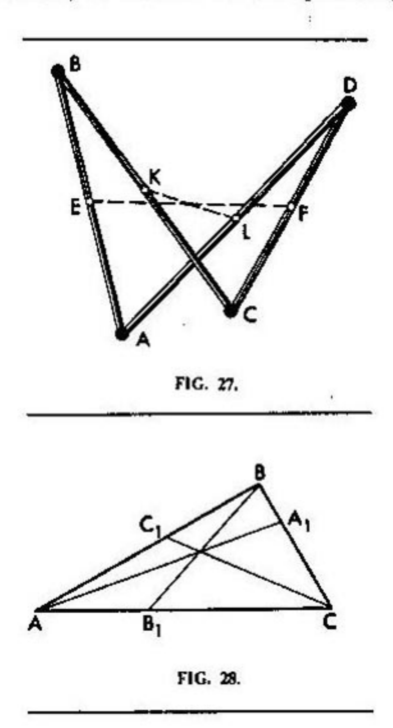


FIG. 27.

FIG. 28.

Teorema de Ceva. El teorema de que las medianas de un triángulo se cortan en un punto es un caso particular de la siguiente consideración conocida como teorema de Ceva:

Sean A_1, B_1, C_1 tres puntos dispuestos, respectivamente, en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC (fig. 28); *para que las rectas AA_1, BB_1, CC_1 se corten en un punto es necesario y suficiente que se cumpla la correlación*

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1. \qquad (1)$$

Recomendamos que el lector comprueba que la correlación (1) realmente tiene lugar en dos siguientes casos:

1. Las rectas AA_1, BB_1 y CC_1 son las bisectrices del triángulo. (*Indicación*: hágase uso del teorema de lo que la bisectriz del ángulo de un triángulo divide el lado opuesto en las partes proporcionales a los lados contiguos). De aquí se deduce que las bisectrices de los ángulos del triángulo se cortan en un punto.

2. Las rectas AA_1, BB_1 y CC_1 son las alturas del triángulo (*Indicación*: hágase uso de la fórmula para las longitudes de los segmentos en que toda altura divide el lado correspondiente). De aquí se deduce que las alturas del triángulo de ángulos agudos se cortan en un punto.

Pasemos a la demostración del teorema de Ceva.

Supongamos que la correlación (1) tiene lugar. Mostremos que la rectas AA_1, BB_1, CC_1 se cortan en un punto. Los razonamientos son análogos a los de dos puntos anteriores. Señalemos que con las cargas adecuadamente elegidas y colocadas en los vértices, el centro de gravedad se dispone en cada una de las rectas AA_1, BB_1, CC_1. Supongamos que en cierta escala

$$AB_1 = a, \qquad B_1C = b,$$
$$CA_1 = c, \qquad A_1B = d,$$
$$BC_1 = e, \qquad C_1A = f,$$

de modo que

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = 1 \tag{2}$$

Coloquemos en el vértice A la carga igual a bd, en el vértice B, la carga de peso ac, y en el vértice C, la carga que pesa ad. El centro de gravedad del sistema $\{A, C\}$ se ubica en el punto que está alejado de los vértices A y C a las distancias inversamente proporcionales a las cargas en estos vértices; pero este punto es B_1. Del modo semejante, el centro de gravedad del sistema $\{B, C\}$ se encuentra en el punto A_1. Y, por fin, el centro de gravedad del sistema $\{A, B\}$ está en el punto cuyas distancias x e y hasta los vértices A y B son inversamente proporcionales a las cargas bd y ac, es decir,

$$\frac{x}{y} = \frac{ac}{bd} \text{ y } x + y = f + e.$$

Pero, de las correlaciones (2) se deduce que

$$\frac{ac}{bd}=\frac{f}{e}.$$

Por esto, $x=f$, $y=e$. Por consiguiente, el centro de gravedad del sistema $\{A, B\}$ da al punto C_1. Nos queda indicar que en virtud del teorema citado al principio del párrafo, el centro de gravedad de todo el triángulo se dispone en cada una de las rectas AA_1, BB_1, CC_1.

Viceversa, supongamos que las rectas AA_1, BB_1, CC_1 se cortan en un punto O; mostremos que se efectúa la correlación (1). Con este objeto imaginémonos que nuestro triángulo es una placa imponderable dispuesta horizontalmente. Hagámoslo apoyado en el punto O y coloquemos en los vértices las cargas de tal manera que el triángulo esté equilibrado (fig. 29). En virtud de la afirmación I del § 5, el punto O será el centro de gravedad del triángulo

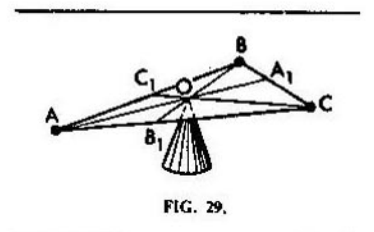


FIG. 29.

con unas cargas en los vértices elegidas de la manera indicada y, por lo tanto, el centro de gravedad del sistema de estas cargas. Por esta razón, el punto O debe disponerse en la recta que une A con el centro de gravedad del sistema $\{B, C\}$; por consiguiente, A_1 es el centro de gravedad del sistema $\{B, C\}$. Igualmente, B_1 y C_1 son centros de gravedad de los sistemas $\{C, A\}$ y $\{A, B\}$. Si designamos las masas de los puntos materiales A, B, C por p, q, r, respectivamente, entonces, de acuerdo con el párrafo anterior

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{r}{p},\quad \frac{CA_1}{A_1B}=\frac{q}{r},\quad \frac{BC_1}{C_1P}=\frac{p}{q}.$$

Al multiplicar estas proporciones obtenemos la correlación necesaria (1).

§ 8
CENTRO DE GRAVEDAD DE UN VÁSTAGO CON VARIAS CARGAS

Generalicemos las consideraciones del § 6.

Imaginémonos un vástago imponderable (fig. 30), en el cual están colocadas las cargas de pesos P_1, P_2, ..., P_n. Hallemos el centro de gravedad de este vástago. Igual que en el § 6, para resolver este problema es suficiente encontrar un punto O tal que si apoyamos el vástago en este punto, el mismo resultará equilibrado. Calculemos la abscisa x de tal punto de apoyo[1].

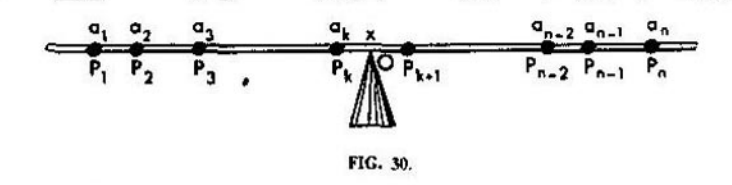


FIG. 30.

Sea a_1 la abscisa del peso P_1; a_2, la abscisa del peso P_2, etc.; a_n, la abscisa del peso P_n. Supongamos (fig. 30) que el punto de apoyo O se encuentra entre las cargas P_k y P_{k+1} (no está excluido el caso en que una de estas cargas está colocada precisamente en el punto O). En este caso, los brazos de las fuerzas P_1, ..., P_k serán iguales a $x - a_1$, ..., $x - a_k$, respectivamente, mientras que los brazos de las fuerzas P_{k+1}, ..., P_n serán iguales, respectivamente, a $a_{k+1} - x$, ..., $a_n - x$. Como el vástago está equilibrado, la suma de los momentos de las fuerzas que le giran en sentido antihorario, debe ser igual a la suma de los momentos de las fuerzas que le giran en sentido horario, es decir,

$$P_1(x - a_1) + \ldots + P_k(x - a_k) = P_{k+1}(a_{k+1} - x) + \ldots + P_n(a_n - x).$$

[1] Aquí y en adelante, por abscisa de un punto en el vástago entendemos la distancia de este punto al extremo izquierdo del vástago.

Los términos continentes x reunamos en el primer miembro, los restantes miembros pasemos al segundo miembro. Tenemos

$$(P_1 + \ldots + P_k + P_{k+1} + \ldots + P_n)x =$$
$$= P_1 a_1 + \ldots + P_k a_k + P_{k+1} a_{k+1} + \ldots + P_n a_n.$$

De aquí

$$x = \frac{P_1 a_1 + \ldots + P_n a_n}{P_1 + \ldots + P_n}.$$

Ejemplo 1. Sea $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, ..., $P_n = n$; $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, ..., $a_n = n$. En este caso según la fórmula deducida

$$x = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{1 + 2 + \ldots + n}.$$

Para calcular esta correlación, escribamos las igualdades

$$1^3 = (1 + 0)^3 = 1^3,$$
$$2^3 = (1 + 1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1,$$
$$3^3 = (2 + 1)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1,$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$(n + 1)^3 = (n + 1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1.$$

Sumando estas igualdades, obtenemos

$$1^2 + 2^3 + \ldots + (n + 1)^3 =$$
$$= 1 + (1^3 + 2^3 + \ldots + n) + 3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) +$$
$$+ 3(1 + 2 + \ldots + n) + n,$$

o bien

$$(n + 1)^3 = 1 + 3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + \ldots + n) + n,$$

o bien

$$3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = (n + 1)(n^2 + 2n) - 3(1 + 2 + \ldots + n).$$

Dividamos ambos miembros entre $3(1 + 2 + \ldots + n)$. En este caso obtenemos

$$\frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{1 + 2 + \ldots + n} = \frac{(n + 1)(n^2 + 2n)}{3(1 + 2 + \ldots + n)} - 1.$$

El número de las unidades en la suma $1 + 2 + \ldots + n$ es igual

al número de los cuadrados rayados en la fig. 31. Este último equivale al número de los cuadrados no rayados, es decir, a la mitad de todos los cuadrados del rectángulo, es decir, $\frac{n(n+1)}{2}$. Por esta razón,

$$x = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{1 + 2 + \ldots + n} = \frac{(n+1)(n^2+2n)}{3(1+2+\ldots+n)} - 1 =$$

$$= \frac{(n+1)(n^2+2n)}{3\,\frac{n(n+1)}{2}} - 1 = \frac{2n+1}{3}.$$

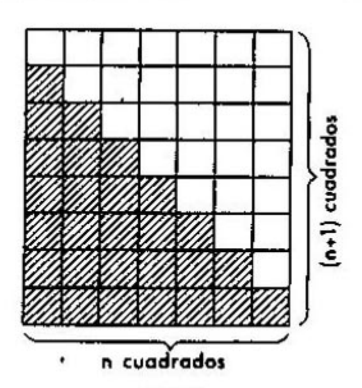


FIG. 31.

De aquí, entre otras cosas, obtenemos que

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{2n+1}{3}(1 + 2 + \ldots + n) =$$

$$= \frac{2n+1n}{3}\,\frac{(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ejemplo 2. Supongamos que las mismas cargas (del ejemplo 1), es decir, las cargas de peso 1, 2, ..., n, están colocadas en los puntos cuyas abscisas son 1^2, 2^2, ..., n^2. Demuéstrese que la abscisa del centro de gravedad es

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

(*Indicación*: Al hacer uso del resultado en el ejemplo 1, calcúlese la suma de los cubos $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$).

Ejemplo 3. Supongamos que en los puntos, indicados en el ejemplo 1, es decir, en los puntos con las abscisas 1, 2, ..., *n*, están dispuestas las cargas de pesos $1^2, 2^2, \ldots, n^2$. Demuéstrese que la abscisa del centro de gravedad es

$$\frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

§ 9
UN PROBLEMA DE LA TEORÍA DE LOS NÚMEROS (FORMULACIÓN)

Los razonamientos mecánicos ayudan, a veces, resolver no sólo problemas geométricos, sino también aritméticos. Ahora demos a conocer un ejemplo bastante inesperado de tal género[1].

Tomemos una línea de números positivos $P_1, P_2, \ldots, P_n$; con el fin de reducir su longitud, de los términos extremos P_1 y P_n sustrayamos un número P, igual al mínimo de dichos términos extremos, y en lugar de esto adicionemos P a los términos medios (si hay un solo término medio, ambos números P se suman a este único término médio). En este caso (siempre que $n > 2$) uno o dos números extremos se reducen a cero, es decir, se eliminan; por consiguiente, la línea obtenida ya será más corta que la de partida. Así, por ejemplo, si la línea de partida era

1, 9, 3, 4,

obtenemos otra línea

10, 4, 3.

Si la línea de partida tuvo la forma

6, 2, 6,

[1] Este ejemplo fue amablemente comunicado al autor por P. S. Nóvikov.

obtenemos la línea compuesta de un solo número, a saber

14.

Una linea obtenida más corta la llamaremos «derivada» de la línea original. De este modo, la línea 10, 4, 3 es la derivada de la línea 1, 9, 3, 4; la línea 14 es la derivada de la línea 6, 2, 6. Observemos que para una línea compuesta de dos números, su derivada coincide con ella misma.

Sea una línea α, con la que haremos lo siguiente. Hallemos la derivada de esta línea y la designemos por α'. Luego hallemos la línea derivada de la línea α', esta última la designemos por α'', y llamaremos segunda derivada de la línea α. La derivada de α'' llamaremos tercera derivada de α y designaremos por α''', y, en general, la derivada de $(n-1)$-ésima derivada se llama la n-ésima derivada que se designa por $\alpha^{n\ '''\cdots'\ \text{rayas}}$. Puesto que la longitud de cada derivada siguiente es en una o dos unidades menor que la longitud de la derivada antecedente, entonces, calculando sucesivamente las derivadas para la línea α, llegaremos, al fin y al cabo, a la línea cuya longitud es igual a 1 ó 2; llamaremos esta línea última derivada o característica de la línea α. Así, la característica de la línea 1, 9, 3, 4 será la línea 7, 10.

Indiquemos que al pasar de la línea a su derivada, la suma de todos los términos de la línea no cambia. Por esta razón la suma de todos los términos de la característica es igual a la suma de todos los términos de la línea original; en el caso en que la característica se compone de un solo término, el valor de éste equivale precisamente a esta suma. En lo que se refiere al caso de la característica de longitud dos, aprenderemos a calcular los valores de sus términos (sin calcular todas las derivadas intermedias) en el párrafo siguiente. Levantaremos, ahora, la cuestión ¿cuándo la característica de la línea se compone de un término, y cuándo de dos? Trataremos de aclarar al principio qué ocurre, cuando se aplica «experimento matemático». Con este fin calculemos las características de unas cuantas líneas del tipo 1, 2, 3, ..., n. Las derivadas sucesivas escribiremos una debajo de la otra y subrayaremos los términos medios:

Ejemplo 1.	α	$1\ \underline{2}\ 3$
	α'	$4\ 2$
Ejemplo 2.	α	$1\ \underline{2\ 3}\ 4$
	α'	$3\ \underline{4}\ 3$
	α''	10

Ejemplo 3.	α	1 2 3 4 5
	α′	2 5 4 4
	α″	7 6 2
	α‴	5 10

Ejemplo 4.	α	1 2 3 4 5 6
	α′	2 4 5 5 5
	α″	4 9 5 3
	α‴	1 12 8
	α⁗	14 7

Ejemplo 5.	α	1 2 3 4 5 6 7
	α′	2 3 6 5 6 6
	α″	3 8 7 6 4
	α‴	8 13 6 1
	α⁗	7 14 7
	α′′′′′	28

Ejemplo 6.	α	1 2 3 4 5 6 7 8
	α′	2 3 5 6 6 7 7
	α″	3 5 10 6 7 5
	α‴	5 13 9 7 2
	α⁗	3 13 13 7
	α′′′′′	16 16 4
	α′′′′′′	12 24

Ejemplo 7.	α	1 2 3 4 5 6 7 8 9
	α′	2 3 4 7 6 7 8 8
	α″	3 4 9 8 7 8 6
	α‴	4 9 14 7 8 3
	α⁗	1 9 17 10 8
	α′′′′′	9 19 10 7
	α′′′′′′	2 26 17
	α′′′′′′′	30 15

Los ejemplos aducidos muestran que la característica de la línea que representa el segmento de la serie natural puede componer tanto de un solo como de dos términos. Se puede observar la siguiente regularidad: la característica se compone de un solo término, si $n = 3k + 1$, de lo contrario ella está compuesta por dos términos.

Simultáneamente se pone de manifiesto otra regularidad interesante: si la característica se compone de dos términos, uno de ellos es dos veces mayor que el otro. De esta manera puede enunciarse el siguiente teorema curioso:

La característica de la línea 1, 2, 3, ..., n *se compone de un término cuando* $n = 3k + 1$, *y de dos términos, cuando* $n = 3k$, *o bien* $n = 3k + 2$; *en este último caso uno de los dos términos (el primero para* $n = 3k$, *y el segundo, para* $n = 3k + 2$) *es dos veces mayor que el otro.*

Este teorema le vamos a demostrar en el párrafo que sigue; además, no haremos caso omiso de la pregunta más general: ¿para qué líneas se compone la característica de un término y para qué líneas, de dos términos (cómo determinarlo según los números $P_1, P_2, \ldots, P_n$, sin calcular todas las líneas derivadas)?

§ 10
UN PROBLEMA DE LA TEORÍA DE LOS NÚMEROS (RESOLUCIÓN)

Demos a nuestro problema una nueva interpretación mecánica. En lugar de la línea de los números $P_1, P_2, \ldots, P_n$ examinemos un vástago (fig. 32 *a*) cargado en los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (tales que $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n$) con las cargas $P_1, P_2, \ldots, P_n$. En este caso, a la línea derivada le corresponde un nuevo sistema de las cargas.

Mostremos que el centro material del sistema derivado de cargas coincide con el centro material del sistema original. Partiremos mentalmente cada una de las cargas extremas P_1 y P_n en dos cargas puntuales

$$P_1 = P + (P_1 - P), \qquad P_n = P + (P_n - P),$$

donde P es la carga menor de P_1 y P_n (así que al menos una de las cargas, $P_1 - P$ y $P_n - P$, es igual a cero). Entonces, el sistema de cargas α puede representarse como la reunión de dos sistemas: el sistema $\underline{\alpha}$ compuesto de las cargas $P_1 - P, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n - P$ (está expuesto *por debajo* del vástago en la fig. 32, *b*),

y el sistema $\bar{\alpha}$, compuesto de dos cargas de peso P cada una de ellas (está expuesto *por encima* del vástago en la fig. 32, *b*). Al pasar al sistema derivado de cargas, todas las cargas del sistema α quedan en sus lugares respectivas, mientras que las cargas

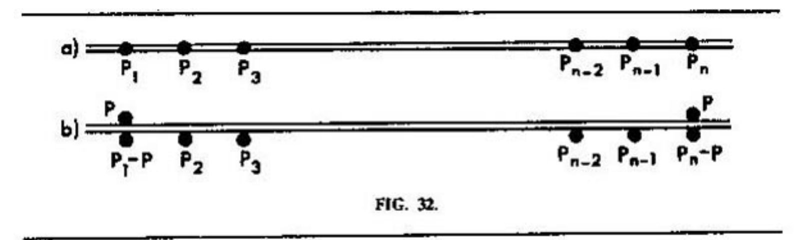


FIG. 32.

del sistema $\bar{\alpha}$ van aproximándose, desplazándose cada una a una distancia igual (¡para sumarse a los términos medios!). En otras palabras, el sistema derivado α' es una reunión de dos sistemas, α' y $\bar{\alpha}'$, de los cuales el sistema α' coincide con el sistema α y el sistema $\bar{\alpha}'$ se obtiene del sistema $\bar{\alpha}$, cuando ambas cargas de este último sistema se aproximan a la distancia igual. Como, evidentemente, $\bar{\alpha}'$ y $\bar{\alpha}$ son equivalentes, entonces, en virtud de la afirmación III del § 5, son también equivalentes los sistemas α y α'. Mientras tanto, los centros materiales de los sistemas equivalentes coinciden.

Así pues, al pasar del sistema de cargas a su derivada, el centro material (y, por lo tanto, el centro de gravedad) del sistema no cambia. Por consiguiente, éste tampoco se altera al pasar del sistema original a su característica.

De este modo, la característica es una carga o dos cargas puntuales que tienen el mismo centro de gravedad que el sistema original de cargas. Indiquemos, además, que las posiciones de las cargas puntuales, que constituyen la característica, coinciden con las posiciones de ciertas cargas del sistema original, es decir, con algunos de los puntos $A_1, \ldots, A_n$. Si la característica contiene dos cargas, estas cargas están dispuestas en los puntos vecinos A_j y A_{j+1}, mientras que el centro de gravedad de la característica se dispone entre estos últimos puntos. Por esta causa, la característica se compone de una sola carga, si, y sólo si, su centro de gravedad (o, que es lo mismo, el centro de gravedad del sistema original) coincide con uno de los puntos $A_1, \ldots, A_n$.

De acuerdo con el § 8, el centro de gravedad del sistema

original tiene por abscisa

$$\frac{P_1a_1 + P_2a_2 + \ldots + P_na_n}{P_1 + P_2 + \ldots + P_n},$$

donde $a_1, \ldots, a_n$ son abscisas de los puntos $A_1, \ldots, A_n$. Si hacemos que $a_1 = 1$, $a_2 = 2, \ldots, a_n = n$, entonces la abscisa del centro de gravedad se expresará por medio de la fórmula

$$\frac{P_1 \cdot 1 + P_2 \cdot 2 + \ldots + P_n \cdot n}{P_1 + P_2 + \ldots + P_n}.$$

Para que el centro de gravedad se haga coincidente con uno de los puntos de número entero $A_1, A_2, \ldots, A_n$, es necesario y suficiente que su abscisa se exprese por un número entero. De aquí se deduce en definitiva que *la característica de la línea $P_1, P_2, \ldots, P_n$ se compone de un término solo en aquel único caso, cuando el número $\frac{P_1 \cdot 1 + P_2 \cdot 2 + \ldots + P_n \cdot n}{P_1 + P_2 + \ldots + P_n}$ es entero.*

En particular, si $P_1 = 1^2$, $P_2 = 2^2, \ldots, P_n = n^2$, entonces (véase ejemplo 3 del § 8) el número $\frac{P_1 \cdot 1 + P_2 \cdot 2 + \ldots + P_n \cdot n}{P_1 + \ldots + P_n}$ es igual a $\frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$. Este número nunca puede ser entero (a excepción de un caso trivial, cuando $n = 1$). En efecto, si este número fuera entero, sería también entero el número $4\frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$. En este caso también lo sería la diferencia

$$4\frac{3n(n+1)}{2(2n+1)} - (3n+1) = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Mas, el número $\frac{n+1}{2n+1}$ es entero sólo en el caso en que $n - 1 = 0$. Así pues, para $n > 1$, la característica de la línea $1, 4, 9, \ldots, n^2$ siempre se compone de dos números.

Si $P_1 = 1$, $P_2 = 2, \ldots, P_n = n$, entonces (véase ejemplo 1 del § 8) el número $\frac{2n+1}{3}$ será el valor de la expresión $\frac{P_1 \cdot 1 + \ldots + P_n \cdot n}{P_1 + \ldots + P_n}$. Si $n = 3k + 1$, el número $\frac{2n+1}{3} = 2k + 1$ es entero y la característica se compone de un solo término. Si $n = 3k$, entonces $\frac{2n+1}{3} = 2k + \frac{1}{3}$; si $n = 3k + 2$, entonces

$\frac{2n+1}{3} = (2k+1) + \frac{2}{3}$; en ambos últimos casos $\frac{2n+1}{3}$ no es un número entero y la característica se compone de dos términos. Con esto queda demostrada la primera parte del teorema enunciado al final del párrafo anterior.

Si $n = 3k$, el centro de gravedad del sistema de las cargas $1, 2, \ldots, n$ tiene por abscisa, como acabamos de mostrar, $2k + \frac{1}{3}$, y, por lo tanto, está dispuesto entre los puntos A_{2k} y A_{2k+1}. Por esta razón, precisamente en estos puntos se ubican las cargas que forman la característica del sistema inicial. Puesto que el centro de gravedad resultó dos veces más próximo al punto A_{2k} que al punto A_{2k+1}, entonces de dos cargas de la característica la que se dispone en A_{2k} es dos veces mayor que la carga dispuesta en A_{2k+1}. Obtenemos de este modo que para $n = 3k$, el primer término de la característica es dos veces mayor que el segundo. Si, ahora, $n = 3k + 2$, la abscisa del centro de gravedad es igual a $(2k+1) + \frac{2}{3}$. El centro de gravedad, en este caso, se dispone entre los puntos A_{2k+1} y A_{2k+2}, siendo dos veces más próximo al segundo de estos puntos. Por eso, la carga (de la característica) dispuesta en el segundo punto es dos veces mayor que la carga en el primer punto; en otras palabras, el segundo término de la característica es dos veces mayor que el primero. Con esto queda completamente demostrado el teorema del § 9.

La suma de los términos de la característica de la línea $1, 2, \ldots, n$ es igual a la suma de los términos de la propia línea, es decir, $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (véase ejemplo 1 del § 8). Al conocer que uno de los términos es dos veces mayor que el otro, podemos calcular también los propios términos. Obtenemos para éstos los valores siguientes: $\frac{n(n+1)}{6}$ (el término menor) y $\frac{n(n+1)}{3}$ (el término mayor).

En definitiva, la característica de la línea $1, 2, \ldots, n$ tiene la siguiente forma

$$\frac{n(n+1)}{3}, \quad \frac{n(n+1)}{6} \quad (\text{si } n = 3k),$$

$$\frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{si } n = 3k+1),$$

$$\frac{n(n+1)}{6}, \quad \frac{n(n+1)}{3} \quad (\text{si } n = 3k+2).$$

En el caso general, para calcular la característica de la línea $P_1, \ldots, P_n$ se debe proceder de la siguiente manera. Hállese ante todo él número

$$x = \frac{P_1 \cdot 1 + P_2 \cdot 2 + \ldots + P_n \cdot n}{P_1 + P_2 + \ldots + P_n}.$$

Si x es un número entero, la característica se compone de un solo término cuyo valor es igual a la suma $P_1 + P_2 + \ldots + P_n$. Si x no es entero, se debe representarlo en la forma

$$x = y + z,$$

donde y es entero y $0 < z < 1$. La característica se compone, en este caso, de dos números, Q_1 y Q_2, con la particularidad de que

$$Q + Q_2 = P_1 + P_2 + \ldots + P_n \tag{1}$$

Dado que Q_1 y Q_2 pueden imaginarse como las cargas que están dispuestas en los puntos con las abscisas y e $y+1$, y que tienen el centro de gravedad en un punto cuya abscisa es x, entonces (de acuerdo con el § 5):

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1-z}{z}. \tag{2}$$

Al resolver el conjunto (1) y (2), hallamos Q_1 y Q_2:

$$Q_1 = \frac{1-z}{z} Q_2,$$

$$\frac{1}{z} Q_2 = \frac{1-z}{z} Q_2 + Q_2 = Q_1 + Q_2 = P_1 + \ldots + P_n,$$

$$Q_2 = (P_1 + \ldots + P_n) z, \quad Q_1 = (P_1 + \ldots + P_n)(1-z) \tag{3}$$

A título del último ejemplo, hallemos la característica de la línea $1, 4, 9, \ldots, n^2$ $(n > 1)$. Ya hemos visto que en este caso $x = \dfrac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$, y la característica consta de dos números. Para calcular los términos de la característica debe, al principio, hallarse z. Con este objeto hagamos $n = 4k + r$, donde $r = 0, 1, 2, 3$. Entonces

$$x = \frac{3n(n+1)}{2(2n+1)} = \frac{3(4k+r)(4k+r+1)}{2[2(4k+r)+1]} = 3k + \frac{3}{2} \frac{2k + 4kr + r + r^2}{8k + 2r + 1}.$$

Si $r = 0$, entonces $x = 3k + \frac{3}{2}\,\frac{2k}{8k+1} = 3k + \frac{3k}{8k+1}$; por lo tanto, $z = \frac{3k}{8k+1} = \frac{v}{2n+1}$, donde $v = 3k$.

Si $r = 1$, entonces $x = 3k + \frac{3}{2}\,\frac{6k+2}{8k+3} = 3k + 1 + \frac{k}{8k+3}$; por lo tanto, $z = \frac{k}{8k+3} = \frac{v}{2n+1}$, donde $v = k$.

Si $r = 2$, entonces $x = 3k + \frac{3}{2}\,\frac{10k+6}{8k+5} = 3k + 1 + \frac{7k+4}{8k+5}$, por lo tanto, $z = \frac{7k+4}{8k+5} = \frac{v}{2n+1}$, donde $v = 7k + 4$.

Si $r = 3$, entonces $x = 3k + \frac{3}{2}\,\frac{14k+12}{8k+7} = 3k + 2 + \frac{5k+4}{8k+7}$; por lo tanto, $z = \frac{5k+4}{8k+7} = \frac{v}{2n+1}$, donde $v = 5k + 4$.

La suma de los términos de la característica es igual a $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (véase ejemplo 1 del § 8). Los términos de la característica se calculan según las fórmulas (3):

$$Q_1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}(1 - z) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,\frac{2n+1-v}{2n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1-v)}{6},$$

$$Q_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,z = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,\frac{v}{2n+1} = \frac{n(n+1)v}{6}.$$

Sustituyendo aquí n por $4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$, y tomando en consideración que v es una función de k, obtenemos en definitiva que la característica de la línea 1, 4, 9, ..., n^2 tiene la forma

$$\frac{2k(4k+1)(5k+1)}{3},\ 2k^2(4k+1) \qquad (\text{si } n = 4k),$$

$$\frac{(2k+1)(4k+1)(7k+3)}{3},\ \frac{k(2k+1)(4k+1)}{3} \qquad (\text{si } n = 4k+1),$$

$$\frac{(k+1)(2k+1)(4k+3)}{3},\ \frac{(2k+1)(4k+3)(7k+4)}{3} \qquad (\text{si } n = 4k+2),$$

$$2(k+1)^2(4k+3),\ \frac{2(k+1)(4k+3)(5k+4)}{3} \qquad (\text{si } n = 4k+3).$$

§ 11
IMPOSIBILIDAD DE OBTENER UN MOTOR PERPETUO

Examinemos un cierto polígono convexo y el punto O dentro de este polígono. Del punto O tracemos las perpendiculares a los lados del polígono. Las bases de estas perpendiculares pueden disponerse tanto en los propios lados (por ejemplo, la perpendicular bajada al lado AB en la fig. 33), como en las prolongaciones de los lados (las perpendiculares bajadas a los lados FA y EF

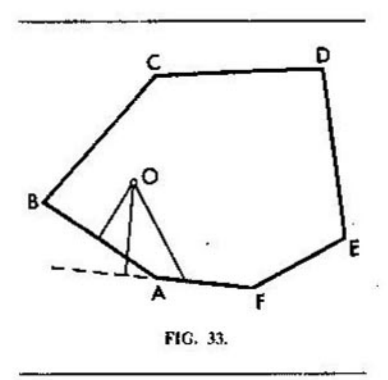


FIG. 33.

en la misma figura). Por supuesto, puede ocurrir que las bases de todas las perpendiculares se ubiquen en los lados (así será, por ejemplo, cuando O es el centro de un polígono regular). Pero, ¿puede suceder que las bases de todas las perpendiculares se dispongan no en los lados sino en las prolongaciones de éstos? Resulta que tal situación no es posible, es decir, *la base por lo menos de una perpendicular se encuentra en el lado correspondiente (y no en su prolongación)*. Para demostrar esta afirmación utilicemos el principio enunciado en el título del párrafo. Imaginémonos el polígono en la forma de una placa fina cuyo centro de gravedad se encuentra en el punto O (se puede, por ejemplo, considerar que toda la placa es imponderable, y en el punto O se encuentra una carga puntual). Pongamos el polinomio de tal modo que su arista se apoye en el suelo horizontal. Si lo ponemos estrictamente

por una vertical, el polígono no caerá: si se quiere, podemos considerarlo mantenido entre dos barandas (fig. 34). El polígono o bien estará en reposo o bien irá rodando; en el último caso va a pararse, al fin y al cabo (de lo contrario obtendríamos un motor perpetuo). La perpendicular trazada del centro de gravedad

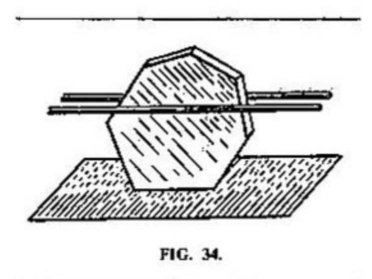


FIG. 34.

a la arista de apoyo del polígono que se ha parado, cortará sin fallar la arista citada (en virtud de la afirmación II del § 5). Así pues, hallamos el lado del polígono para el cual la base de la perpendicular trazada del punto *O* se dispone en el propio lado.

El teorema análogo es válido también para un poliedro. Sea dado un poliedro convexo y el punto *O* dentro del poliedro. Tracemos las perpendiculares del punto *O* a todos los planos de las caras del poliedro. En este caso, *la base de, por lo menos, una de estas perpendiculares se ubica en la propia cara* (*y no en la prolongación de la cara*).

Para demostrar, imaginémonos un poliedro en forma de un cuerpo material cuyo centro de gravedad es el punto *O*. (Vamos a considerar, por ejemplo, que todo el poliedro es imponderable, mientras que en *O* se dispone la carga puntual). Pongamos, ahora, nuestro poliedro de una manera tal que una de sus aristas se apoye en el suelo horizontal. El poliedro o bien quedará equilibrado o bien rodará; en el último caso se parará, tarde o temprano, en el estado de equilibrio. Así pues, existe la posición en que el poliedro se queda inmóvil en el suelo. Examinemos la cara que sirve del plano de apoyo para el poliedro. En virtud de la afirmación II del § 5, una perpendicular trazada desde *O* al plano de esta cara pasará a través de la propia cara. Hallamos, pues, la cara que satisface los requisitos enunciados en el teorema.

CONCLUSIÓN

Todos los problemas que hasta ahora hemos examinado pudieron ser resueltos por medio de los métodos puramente matemáticos. Sin embargo, no debe pensarse que el uso de los razonamientos mecánicos para resolver los problemas matemáticos es solamente un ejercicio para la mente. Los métodos semejantes llevan la importancia tanto histórica como práctica.

Aún Arquímedes aplicaba las leyes de equilibrio a la búsqueda de las áreas de las figuras curvilíneas; así, por ejemplo, para calcular el área de un segmento parabólico (es decir, figura limitada por el arco de una parábola y por la cuerda que la contrae) él «suspendía» el segmento del brazo de una palanca [1]. En todos los tiempos los razonamientos físicos y mecánicos ejercían y continúan ejerciendo una influencia considerable en la obtención de los resultados matemáticos si no en la forma de la demostración directa, entonces en calidad de las sugestiones [2].

La aplicación de las leyes mecánicas a las matemáticas es un caso particular del método general que consiste en el empleo recíproco de las relaciones existentes entre los fenómenos de la naturaleza y su descripción matemática. Describir matemáticamente cierto fenómeno significa deducir las fórmulas que permiten calcular las características físicas de este fenómeno (velocidades, temperaturas, distancias, etc.), o bien las ecuaciones de cuyas soluciones sirven las características mencionadas. La utilización directa de la descripción matemática consiste en lo que podemos hallar los valores numéricos de las características sin observar el propio fenómeno, pero realizando los cálculos según las fórmulas correspondientes, o bien resolviendo las correspondientes ecuaciones. Resulta conveniente proceder de esta manera en aquellos casos, cuando el propio fenómeno es complejo, mientras que su descripción matemática es sencilla. No obstante, se puede proceder de la manera inversa: en lugar de calcular los valores de las fórmulas o solucionar las ecuaciones, realizar el propio fenómeno por vía experimental, medir

[1] Véase los libros: V. F. Kagan, «Arquímedes», Editorial «Gostejizdat», 1949 (en ruso) y S. Ya. Lurie, «Arquímedes», Edición de la Academia de ciencias de la URSS, 1945 (en ruso).

[2] Con este motivo, véase capítulo IX («Matemática física») del libro «Matemáticas y razonamientos verosímiles» por D. Poya, editado en la traducción al ruso por la Editorial «Inostrannaya literatura», 1957.

las características que nos interesan y, de esta manera, obtener experimentalmente los valores de las fórmulas y las soluciones de las ecuaciones. Este método es conveniente en los casos en que enfrentamos las fórmulas complejas o las ecuaciones difíciles de resolver que, sin embargo, describen los fenómenos que pueden ser realizados de una manera relativamente fácil.

Este principio constituye la base de la simulación (es decir, la exploración de los procesos físicos con los modelos) en la que se lleva a cabo el siguiente esquema: se necesita estudiar el proceso A (simulado); este proceso se describe por medio de las fórmulas y las ecuaciones E; simultáneamente E es la descripción para el proceso A' (el que simula) que puede ser reproducido en las condiciones de laboratorio; se realiza el proceso A' con lo cual se hallan los valores de las fórmulas y las soluciones de las ecuaciones E, y, por consiguiente, se obtienen las propiedades necesarias del proceso A. Suele decirse del proceso A (como también de las fórmulas y ecuaciones E) que él *es simulado* por el proceso A'. Si dos procesos se describen por medio de las mismas fórmulas y ecuaciones, suele decirse, además, que en este caso existe *la analogía* entre estos procesos.

A título de ejemplo más sencillo de la simulación sirve la resolución del problema de Steingauz, expuesto en el § 4. El fenómeno simulado aquí A es la concurrencia de los niños a la escuela. La característica buscada es el tiempo gastado. Este tiempo es el valor de cierta función. Para el fenómeno de simulación A' (la suspensión de las cargas de los hilos) el valor de la misma fórmula se expresa por la magnitud de la energía potencial. Este último fenómeno se reproduce por vía experimental.

El método de simulación tiene una gran importancia práctica (a título de los procesos de simulación se emplean, en mayor parte, los procesos hidrodinámicos y eléctricos)[1]. En particular, este método es la base de una serie de las llamadas máquinas de integración. Demos a conocer, ahora, el principio del funcionamiento del integrador de fricción, una máquina más sencilla de las recién mencionadas.

Sea dada la recta p y la curva l, dispuesta por un lado de la recta (fig. 35), con la particularidad de que cada perpendicular a p corta l a lo sumo en un punto. Tomemos dos perpendiculares

[1] Véase artículos «Simulación» por A. N. Kolmogórov y «Simulación matemática» por L. I. Gutenmajer en Gran Enciclopedia Soviética, vol. 28, segunda edición.

de este género, AB y CD, y buscaremos el área S del trapecio curvilíneo $ABDC$. Con este fin dividamos el segmento en partes menudas por medio de los puntos

$$X_1 = A,\ X_2,\ X_3,\ \ldots,\ X_n,\ X_{n+1} = C$$

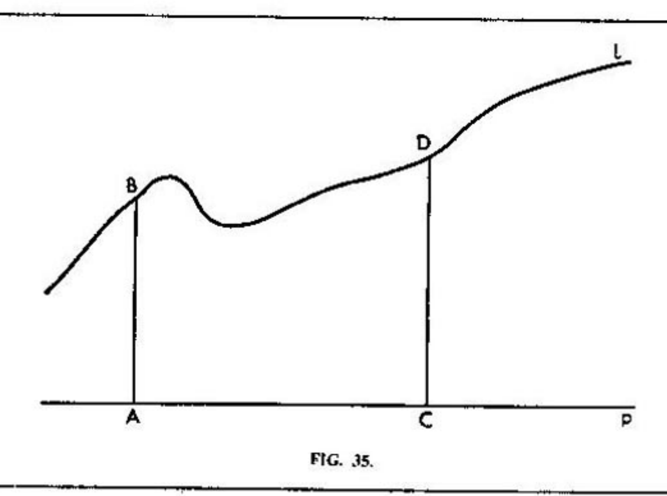


FIG. 35.

(en la fig. 36 $n = 6$). En cada uno de los segmentos X_i, X_{i+1} elijamos un punto T_i del cual bajemos la perpendicular hasta que se corta con la curva l en el punto Y_i. De cada punto Y_i tracemos las perpendiculares, paralelas a p, hasta que se intersequen con las perpendiculares trazadas en los puntos X_i. El área S' de la figura escalonada, rayada en la fig. 36, es aproximadamente igual al área S del trapecio curvilíneo, siendo tanto más próxima al área del último cuanto menores sean los segmentos X_i, X_{i+1} entre los cuales está dividida la base AC. Supongamos que las longitudes de los segmentos X_1, X_2, ..., X_n, X_{n+1} son iguales, respectivamente, a α_1, ..., α_n, y las longitudes de los segmentos T_1Y_1, ..., T_nY_n son, respectivamente, y_1, ..., y_n. En este caso el área S' es

$$\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n. \qquad (1)$$

Examinemos, ahora, un sistema que incluye el disco I y la rueda II, apretada con su llanta al disco I (fig. 37). La rueda II puede desplazarse a lo largo de su eje. Sea y la distancia entre

la rueda II y el centro O del disco I al instante cualquiera. Hagamos girar el disco I el ángulo α (en radianes). El punto del disco I, que antes del giro tocaba la rueda II, cubrirá, realizado el giro, un arco igual a αy; la misma distancia correrá el punto

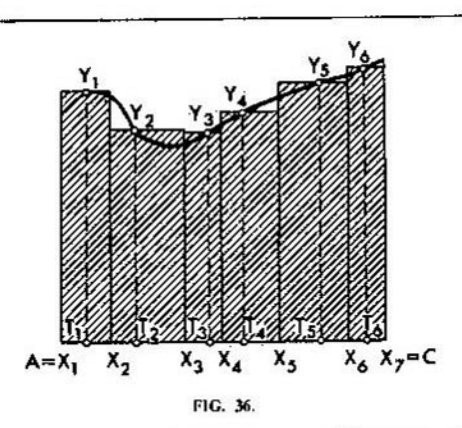


FIG. 36.

dispuesto en la llanta de la rueda II. La rueda II dará vuelta en este caso al ángulo β. Cuando la rueda II gira el ángulo β, el punto de su circunferencia corre el arco βr, donde r es el radio de la rueda II. Por esta razón, $\alpha y = \beta r$. Admitamos que $r = 1$. Entonces, $\beta = \alpha y$. Si, ahora, colocamos la rueda II a la distancia y_1 del centro O y viramos el disco el ángulo α_1, después colocamos la rueda II a la distancia y_2 del centro O y viramos el disco el ángulo α_2, etc. y, por fin, colocamos la rueda II a la distancia y_n del centro O y viramos el disco el ángulo α_n, entonces, el ángulo total que, de resultas, gira la rueda II, será numéricamente igual a la magnitud (1), es decir, al área S' de la figura escalonada que está rayada en la fig. 36.

Dibujemos en una hoja de papel la recta p y la curva l (fig. 38). Consideremos el mecanismo siguiente. Una regla está sujeta en dos rodillos, uno de los cuales rueda a lo largo de la recta p (de modo que la regla este siempre paralela respecto de esta recta). En la regla se tiene un cursor que puede desplazarse por la regla. En el centro del cursor está montado un palpador cuyo extremo toca el papel. Imaginémonos que la regla se encuentra ligada con el disco I y la rueda II de la manera siguiente: el giro del rodillo

de la regla origina el giro del disco I el mismo ángulo; la distancia de la rueda II al centro del disco O es siempre igual a la distancia entre el centro del cursor y el extremo de la regla. Supongamos que el radio del rodillo de la regla es igual a 1.

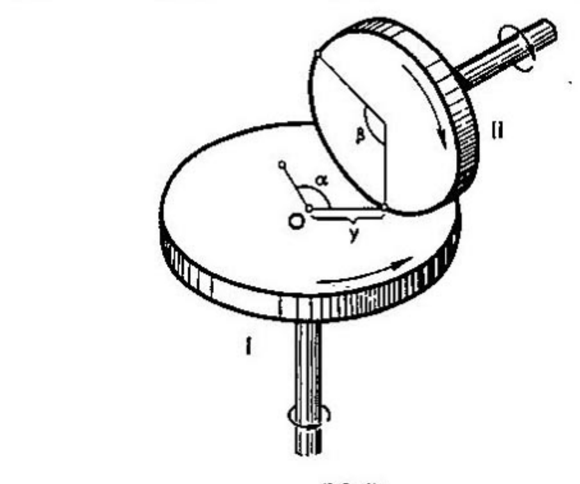


FIG. 37.

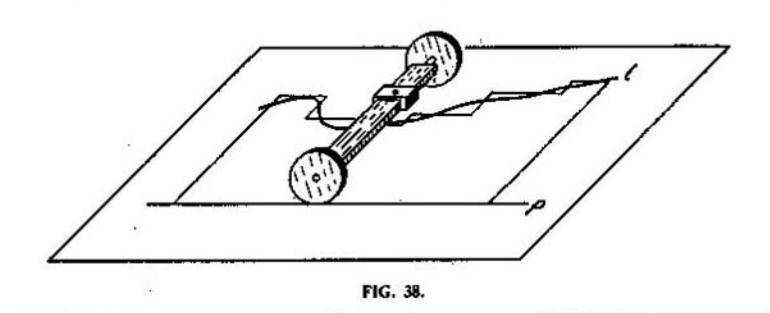


FIG. 38.

Sirviéndonos del palpador dibujemos los contornos de la figura escalonada construida en la fig. 38; en este procedimiento la regla irá corriendo a lo largo de la recta p, mientras que el cursor irá desplazándose por la regla. De lo dicho en el párrafo anterior se deduce que la rueda II, como resultado, girará el ángulo igual

numéricamente al área S'. Cuanto menores son las partes en que se divide el segmento AC, tanto más la quebrada, que constituye el contorno de la figura escalonada, se aproxima a la curva l, y S', a la magnitud S. Por esta razón, si contorneamos con la espiga no la línea quebrada, sino la propia curva l, la rueda II girará el ángulo, igual a S. El giro de la rueda II puede ser registrado por una escala especial.

El proceso simulado en este caso es el proceso de medición del área del trapecio curvilíneo a través del cálculo de las áreas de las figuras escalonadas. Este proceso se describe por medio de la fórmula (1). Resultó que esta misma fórmula describe algún otro proceso, relacionado con el mecanismo de fricción, expuesto en la fig. 37. Esto nos presta la posibilidad de simular, con ayuda de este mecanismo, la fórmula (1) y el proceso de medición de las áreas que está expresado por la fórmula citada.

Así pues, las analogías mecánicas nos llevaron al instrumento para calcular las áreas de las figuras escalonadas (con aquella particularidad de que se trata aquí de las figuras de un genero especial, esto es, de los trapecios curvilíneos[1]).

Acabando con nuestra exposición hagamos una observación que lleva un carácter principal. Todos los razonamientos basados en las interpretaciones mecánicas pueden ser apreciados por un lector riguroso como no correctos. Aún el primer ejemplo (más sencillo), citado en el § 1, puede ser objetado. En efecto, el hilo no es una recta (tiene un espesor determinado y si se escrutina en un microscopio, resulta ser de una forma bastante irregular), de modo que la frase «el hilo va a lo largo de la recta» está privada del sentido exacto. A continuación, en el sentido cabal, no se puede hablar del extremo del hilo como de un punto (incluso la propia afirmación de que la carga está sujetada al hilo en el punto determinado tampoco es impecable). Por fin, todo hilo real es elástico por lo cual la longitud del hilo con una carga suspendida es mayor que la longitud del hilo sin carga.

Podríamos aducir muchas observaciones criticas de esta especie referentes tanto al razonamiento que acabamos de exponer como a los

---

[1] Los instrumentos que calculan el área del trapecio, al contornear la parte curvilínea de este, se denominan integrímetros véase «curso abreviado de las máquinas matemáticas» por B. N. Delone, Parte I, Editorial «Gostejizdat», 1952). Los instrumentos que calculan el área de una figura arbitraria, al contornearla por completo, se llaman planímetros. Acerca de los planímetros véase el libro citado de Delone y también «Cálculo de las áreas de las figuras orientadas» por A. M. Lopshiz, que constituye la 20-ésima obra de esta serie.

razonamientos análogos que sirven de base para toda la exposición. No obstante, no debe pensarse que todos estos razonamientos están privados de valor cognoscitivo. Los consideramos no menos persuasivos en comparación con las demostraciones geométricas. El hecho es que todas nuestras afirmaciones acerca de los hilos, las cargas, etc. tienen sólo un carácter aproximado y tanto mayor es su certeza cuanto más perfectas son las propiedades del objeto que se considera (el hilo, la carga, etc.). En nuestro caso, cuanto más fino sea el hilo, tanto mayor es la exactitud con que se cumplen ciertas afirmaciones (por ejemplo, «el hilo va a lo largo de la recta»); en este caso suele decirse que estas afirmaciones se cumplen para un hilo infinitamente fino. Para otras afirmaciones (por ejemplo, las longitudes del hilo cargado y sin carga son iguales), la exactitud con que ellas se cumplen es tanto mayor cuanto menos elástico sea el hilo; en este último caso suele decirse que estas afirmaciones se cumplen para un hilo absolutamente rígido. Está claro que en la naturaleza no existen los hilos que sean infinitamente finos o absolutamente rígidos. Estas afirmaciones expresan las nociones ideales como, por ejemplo, la noción del punto de la aplicación de una fuerza, bien sabida del curso escolar; cuanto menor sea la superficie de la interacción de los cuerpos tanto mayor es la exactitud con que se cumplen en realidad las deducciones hechas para las fuerzas aplicadas en los puntos. La misma idealización representa la noción del punto material. Cuanto menores sean los volúmenes de los cuerpos reales tanto mayor es la exactitud con que se cumplen los hechos establecidos para los puntos materiales.

Se debe subrayar aquí que todos los conceptos y las leyes de la mecánica (como también, de la física, en general) se encuentran relacionados con la idealización de los fenómenos de la naturaleza. Por esta razón, ya un escolar se encuentra muy a menudo con las idealizaciones semejantes sin darse, quizás, cuenta de este hecho. Tomemos, por ejemplo, uno de los conceptos más elementales de la mecánica, el del movimiento uniforme. En la naturaleza no existen movimientos perfectamente uniformes (al efectuar la medición minuciosa resulta que incluso las manecillas de un reloj se mueven de la manera no uniforme). Sin embargo, en toda una serie de los casos esta irregularidad es tan pequeña que resulta conveniente menoscabarla; precisamente así surge el concepto del movimiento uniforme. Lo mismo puede decirse acerca de la primera ley de Newton: no existen cuerpos que no estén accionados por otros cuerpos. Podríamos continuar infinitamente la lista de los ejemplos semejantes; estos ejemplos se reflejan en toda la física.

Vemos, pues, que la mecánica opera, de hecho, no con los cuerpos y procesos reales, sino con los ideales, tales como «un cuerpo que no está accionado por otros cuerpos», «el movimiento uniforme rectilíneo», etc. Y nosotros tratámoslos como objetos reales, como si existieran ellos en realidad.

Indiquemos, por fin, que las abstracciones mecánicas (como, por ejemplo, un punto material, un hilo imponderable infinitamente fino

y absolutamente rígido, etc.) no se diferencian en nada, por su naturaleza, de las abstracciones geométricas (un punto, una recta, un plano, etc.); es que los puntos, las rectas y los planos no existen en la naturaleza como los objetos reales, y el sentido real de las afirmaciones que se hacen acerca de ellos, consiste en lo que cuanto más objetos tomados reales van aproximándose, por sus propiedades, a los puntos, las rectas, los planos, etc., tanto mayor es la exactitud con que se cumplen estas afirmaciones.

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

MIR PUBLICA:

Ya. Perelmán

ALGEBRA RECREATIVA

El libro «Algebra recreativa» no es un libro de texto. Su objetivo es precisar y revivir los conocimientos de esta rama del saber echados al olvido y, fundamentalmente, inculcar al lector el interés hacia el ejercicio del álgebra. Así es como determina el propio autor el objetivo de su obra. Con el fin de hacer un libro atractivo y ameno, Ya. Perelmán utiliza ejercicios con temas extraordinarios, se adentra en la historia de las matemáticas, muestra aplicaciones inesperadas del álgebra en los quehaceres habituales de la vida y da a conocer curiosos rompecabezas. El lector conocerá las acciones matemáticas quinta, sexta y séptima, las ecuaciones de Diofanto y las interesantes propiedades de las progresiones.
Para leer el libro "Algebra recreativa" sólo se requiere tener una idea general de esta ciencia, es decir, una preparación equivalente a la que se enseña en las escuelas de segunda enseñanza.
El libro "Algebra recreativa" ha sido reeditado once veces en ruso y traducido a varios idiomas.

G. Shilov

GAMA SIMPLE (CONFECCIÓN DE LA ESCALA MUSICAL)

La música se basa en el tono musical o en el sonido de una altura determinada que representa un proceso oscilatorio que con cierta frecuencia vehícula por el aire. Aunque nuestro oído percibe tonos por una banda de frecuencias bastante amplia, en música nosotros utilizamos un número de tonos relativamente pequeño.
El problema acerca de qué tonos debe poseer la escala musical se resuelve por métodos matemáticos. A ello está dedicado el presente folleto, cuyo autor es el Doctor en Ciencias fisicomatemáticas, profesor G. Shilov.

A. Guelfond

SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES EN NÚMEROS ENTEROS

El folleto del conocido matemático soviético, miembro-correspondiente de la Academia de Ciencias de la URSS A. Guelfond está consagrado a uno de los problemas más interesantes y difíciles de la teoría de los números. A pesar del esfuerzo de muchas generaciones de matemáticos, el problema de la solución de ecuaciones en números enteros se ha logrado resolver sólo para ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas.

En el folleto se exponen algunos resultados fundamentales obtenidos en la teoría de la solución de ecuaciones en números enteros. Se dan las demostraciones de los teorías enunciados siempre que sean suficientemente sencillos.

El folleto está destinado a un amplio círculo de lectores y sólo requiere la familiarización con el curso de matemáticas elementales.

L. Lustérnik

LÍNEAS DE LONGITUD MÍNIMA

El cálculo de variaciones es una de las ramas de las Matemáticas modernas más ampliamente desarrollada y con numerosas aplicaciones en las ciencias naturales y la técnica. Trata las magnitudes que dependen de curvas y busca aquellas que expresan el valor mínimo o máximo de estas magnitudes. Sus orígenes se remontan al tiempo en que Galileo planteó el famoso problema sobre la braquistocrona; esta última es la curva que une dos puntos dados y por la cual desciende, en tiempo mínimo, un punto material. Galileo pensaba equivocadamente que se trataba del arco de una circunferencia. Más tarde, Bernoulli demostró que dicha curva es un arco de cicloide y, con Euler y Lagrange, sentó las bases del cálculo de variaciones que, desde entonces, comenzó a desarrollarse intensamente, encontrando cada vez mayores aplicaciones. Basta señalar, por ejempló, que actualmente ha sido descubierto por el gran matemático soviético L. Pontriaguin el famoso principio del máximo en los sistemas dinámicos.

Posiblemente, sea el libro de L. Lustérnik, miembro – correspondiente de la Academia de Ciencias de la URSS, la única introducción elemental existente al cálculo de variaciones. El texto no requiere ningún conocimiento especial y está totalmente al alcance de todos los alumnos de grados superiores de la enseñanza media; sin embargo no deja de tener interés para profesores e, incluso, especialistas.

Lecciones populares de matemáticas

Obras de nuestro sello editorial

A.S. Solodóvnikov

Sistemas de desigualdades lineales

G.E. Shilov

Gama simple

Cómo construir las gráficas

V.G. Shervátov

Funciones hiperbólicas

N.Ya. Vilenkin

Método de aproximaciones sucesivas

Yu.I. Lyúbich, L.A. Shor

Método cinemático en problemas geométricos

Editorial MIR



Moscú